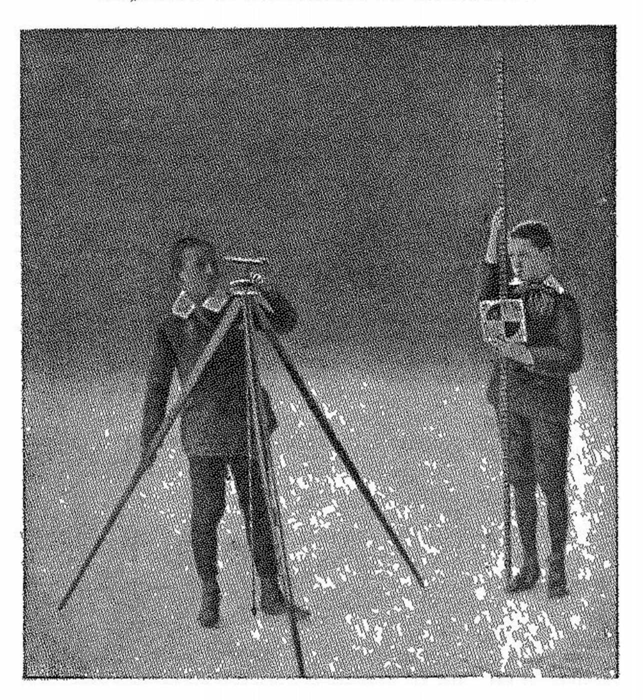
НОВОЕ ВОСПИТАНІЕ И ОБРАЗОВАНІЕ.
Подъ редакціей И. Горбунова-Посадова.
Выпускъ пятнадцатый.

Вильямъ Кемпбелъ,
преподаватель математики въ Бостонской Латинской школѣ.

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Перевелъ съ англійскаго Е. ПОПОВЪ.



Съ болѣе чѣмъ 300 рисунками и чертежами.

Изданіе второе.



Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К°. Пименовская ул. соб. д.
Москва—1910.

НОВОЕ ВОСПИТАНІЕ и ОБРАЗОВАНІЕ
Подъ редакціей И. ГОРБУНОВА-ПОСАДОВА
Выпускъ пятнадцатый

Вильямъ Кемпбель,
преподаватель математики въ Бостонской ~~Латинской~~ школѣ.

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ПОСОБІЕ ДЛЯ ОБУЧЕНІЯ и САМООБУЧЕНІЯ

СЪ ВВЕДЕНІЕМЪ

А. Филлипса, профессора математики.

Съ болѣе чѣмъ 300 рисунками и чертежами.

Перевелъ съ англійскаго **Е. Поповъ.**

СОДЕРЖАНІЕ.

Часть I

Простѣйшія формы и изготовленіе моделей.

Легкія упражненія въ измѣреніяхъ.

Часть II.

Точки, линіи, углы, многоугольники и круги.

Построенія, измѣренія, подобныя фигуры и съемка.

ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКА.

Мнѣ уже нѣсколько лѣтъ приходится заниматься съ дѣтьми математикой. Съ самаго начала занятій я долженъ былъ убѣдиться, какъ убѣждаются и многіе, кромѣ меня, что тотъ способъ изложенія математики и въ особенности геометріи, по какому обучали насъ и теперь обучаютъ юношей въ учебныхъ заведеніяхъ всего свѣта, таковъ, что не только не вызываетъ къ себѣ интереса въ учащихся, но способенъ отбить у большинства всякую охоту заниматься этимъ предметомъ. Способъ этотъ таковъ, что преподаватели математики, связанные программой и формой преподаванія, невольно прибѣгаютъ къ различнымъ принудительнымъ средствамъ, чтобы заставить учениковъ учить и заучивать то, что для нихъ не привлекательно и не интересно.

Я не могъ употреблять никакого принужденія надъ моими учениками и потому долженъ былъ выбрать одно изъ двухъ: или отказаться совсѣмъ отъ преподаванія математики, или попытаться такъ излагать ее, чтобы она была привлекательна для нихъ. Увѣренный, что и раньше меня обучающіе математикѣ были въ такомъ же затрудненіи и, вѣроятно, дѣлали попытки выйти изъ него, я сталъ искать въ литературѣ опытовъ привлекательнаго и доступнаго для дѣтей изложенія математики и кое-что нашелъ отчасти на русскомъ языкѣ, но главнымъ образомъ на иностранныхъ. Одну изъ такихъ попытокъ представляетъ предлагаемый американскій учебникъ геометріи В. Т. Кемпбеля. Авторъ не только постарался изложить геометрію такъ, чтобы она была интересна сама по себѣ, но онъ сопровождаетъ изло-

женіе изготовленіемъ чертежей и моделей, и это, удовлетворяя дѣтской потребности самодѣятельности, дѣлаетъ для учащихся предметъ особенно привлекательнымъ.

Хочется думать, что появленіе въ свѣтъ этой книги будетъ полезно какъ для родителей, которые поставлены въ необходимость выбора или оставлять своихъ дѣтей безъ образованія, или предоставлять ихъ всѣмъ мытарствамъ современно-схоластическаго обученія, такъ и для того все возрастающаго въ нашемъ русскомъ обществѣ слоя людей изъ народа, которые, не имѣя средствъ и возможности знакомиться съ науками обычнымъ путемъ прохожденія черезъ учебныя заведенія, удовлетворяютъ свою потребность просвѣщенія путемъ чтенія и самообразованія. Эти люди просвѣщаютъ себя не отъ нечего дѣлать, такъ какъ имѣютъ очень мало досуга, не ради привилегій, связанныхъ съ образованіемъ, а изъ одной духовной потребности, и я былъ бы въ высшей степени радъ, если бы эта книга оказалась полезной для этого рода людей.

Конечно, „Наглядная геометрія“ недостаточна для того, чтобы замѣнить систематически изложенный курсъ геометріи, но все-таки она можетъ для однихъ послужить введеніемъ въ такой курсъ, а другимъ дастъ многія указанія для практическаго приложенія геометріи при измѣреніи площадей и объемовъ тѣлъ.

Е. Поповъ.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ дѣлахъ природы и человѣка геометрія играетъ очень важную роль. Лучи солнечнаго свѣта напоминаютъ прямыя линіи; поверхность спокойно стоящей воды—плоскость; грани кристалловъ—это различныя плоскія фигуры, ограниченныя прямыми линіями, тогда какъ сами кристаллы—это самыя обыкновенныя геометрическія тѣла, ограниченныя плоскостями. Кромѣ того, миріады другихъ формъ въ животномъ, растительномъ и минеральномъ царствѣ представляютъ безконечное разнообразіе симметричныхъ и сложныхъ геометрическихъ формъ. Также и произведенія художниковъ и архитекторовъ и построенія инженеровъ и астрономовъ всѣ основываются на геометріи.

Пріученіе дѣтей къ наблюденію простыхъ геометрическихъ формъ и соотношеній между предметами, которые ежедневно попадаются имъ на глаза, обученіе ихъ употребленію простыхъ инструментовъ для геометрическихъ построеній и ознакомленіе ихъ съ разнообразными способами опредѣленія длины, площади и объемовъ предметовъ, все это самое естественное и самое могущественное средство какъ для пріученія ихъ къ наблюдательности, такъ и для выработки привычки къ сосредоточенному и продолжительному вниманію.

Старыя ариѳметики съ ихъ трудными задачами были могущественнымъ средствомъ для развитія способности анализа, но онѣ не были сколько-нибудь удовлетворительнымъ средствомъ для пріученія учащихся къ наблюдательности *).

Правда, многія изъ задачъ въ этихъ ариѳметикахъ были взяты изъ практической жизни и были неоцѣнимы, какъ средство для ознакомленія учениковъ съ нѣкоторыми простыми правилами измѣренія и для вызыванія интересовъ къ методамъ производства самыхъ измѣреній для полученія данныхъ для задачъ, къ которымъ эти правила могутъ быть примѣнены: задачъ на нахожденіе вмѣстимости ящи-

*) Авторъ говоритъ здѣсь объ англійскихъ задачникахъ, наши же, къ сожалѣнію, и въ этомъ отношеніи не были „могущественнымъ средствомъ".

Е. П.

ковъ и подсчета стоимости досокъ, употребляемыхъ для ихъ изготовленія; задачъ на нахожденіе площади полей разнообразныхъ формъ; задачъ на опредѣленіе высоты деревьевъ по ихъ тѣни и т. п.

Такія геометрическія задачи вызываютъ часто живой интересъ и желаніе знать основанія, которыя служили для созданія правилъ, употребляемыхъ для ихъ рѣшенія, и такимъ образомъ создаютъ потребность въ изученіи настоящей геометріи. Однако необходимость тщательнаго и систематическаго развитія предмета, какъ средства воспитанія наблюдательности, не уживается съ обиліемъ ариѳметическихъ задачъ и доходитъ въ дѣлѣ установленія предметнаго обученія въ школахъ до такихъ широкихъ предѣловъ, что не остается мѣста для задачъ. Но предметное обученіе, которое пріучаетъ главнымъ образомъ къ непосредственному вниманію къ растительной и животной жизни и простому наблюденію формъ, не въ состояніи дать ту остроту умственныхъ способностей и ту особую привычку сильнаго мышленія, которую можетъ дать только обдумываніе математическихъ задачъ.

Наглядная геометрія соединяетъ въ себѣ одновременно и выгоды предметнаго обученія, насколько оно пріучаетъ глазъ къ быстрому и сознательному пониманію, съ обиліемъ упражненій, которыя доставляли очень цѣнныя задачи старыхъ ариѳметикъ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, наглядная геометрія даетъ такую умственную дисциплину, которая въ одно и то же время и строга, и совершенно свободна отъ той односторонности, къ которой могутъ привести и та и другая система, если брать ихъ отдѣльно.

Она вырабатываетъ ловкость и быстроту рукъ при составленіи чертежей и моделей геометрическихъ тѣлъ. Она пріучаетъ глазъ къ вѣрному и точному опредѣленію формъ и разстояній. Она научаетъ оцѣнкѣ красоты и правильности формъ. Она отыскиваетъ, извлекаетъ и усваиваетъ методы совершенныхъ геометрическихъ выводовъ изъ всякаго источника въ природѣ и изъ всякаго примѣненія его въ жизни. Она является наилучшимъ побудителемъ изобрѣтательности. Она знакомитъ ученика со многими положеніями и идеями физическихъ наукъ и является открытой дверью къ дальнѣйшему изученію настоящей геометріи и ея высшихъ отраслей.

А. В. Филлипсъ.

Для учителя.

Модели слѣдуетъ дѣлать въ классной комнатѣ, на глазахъ учителя. Матеріаломъ для нихъ долженъ служить тонкій карточный картонъ, разрѣзанный на куски надлежащей величины.

Ученикъ долженъ складывать готовыя модели въ ящикъ, туда же можно класть и чертежныя принадлежности. Вопросъ о чистотѣ и точности работы долженъ быть рѣшенъ при исполненіи первой же модели.

Число изготовляемыхъ моделей будетъ измѣняться въ теченіе курса сообразно съ классами и учениками, и самое выполненіе ихъ можетъ быть иногда предоставлено самимъ ученикамъ; но только надо предполагать, что устныя наставленія будутъ излагаться подробно заранѣе. Авторъ особенно подробно разсматриваетъ кубъ, чтобы дать примѣръ того метода, который нужно употреблять при разсматриваніи другихъ тѣлъ.

Ученики должны быть предупреждены, что размѣры при чертежахъ, данные въ двухъ системахъ — метрической и англійской, чередуются и не вполнѣ точно совпадаютъ другъ съ другомъ.

Для справокъ.

Таблица мѣръ длины и ихъ соотношенія.

Метрическая система.

10 миллиметровъ (мм.) = 1 сантиметру (см.) = $^3/_8$ дюйма приблизительно.

10 сантиметровъ = 1 дециметру (дцм.) = $3^{15}/_{16}$ дюйма приблизительно.

10 дециметровъ = 1 метру (м.) = $3^1/_4$ фута приблизительно.

10 метровъ = 1 декаметру = 4,64 сажени приблизительно.

10 декаметровъ = 1 гектометру = $46^1/_2$ сажени приблизительно.

10 гектометровъ = 1 километру = $^3/_5$ англ. мили приблизительно.

10 километровъ = 1 миріаметру = $6^1/_5$ англ. мили приблизительно.

Метръ—это приблизительно одна десятимилліонная часть разстоянія поземной поверхности отъ экватора до одного изъ полюсовъ, опредѣленная въ первый разъ во Франціи въ 1799 году.

Англійская система.

12 линій = 1 дюйму (д.) = 25 миллиметрамъ приблизительно.

12 дюймовъ = 1 футу (ф.) = 3 дециметрамъ приблизительно.

3 фута = 1 ярду (ярд.) = 0,9 метра приблизительно.

$5^1/_2$ ярдовъ = $16^1/_2$ ф. = 1 роду = 5 метрамъ приблизительно.

320 ярдовъ = 1 милѣ = 1,6 километра.

Верхній край изображенной здѣсь линейки представляетъ одинъ дециметръ, раздѣленный на сантиметры и миллиметры. Нижній край ея имѣетъ четыре дюйма длины и раздѣленъ на четвертыя и восьмыя части дюйма.

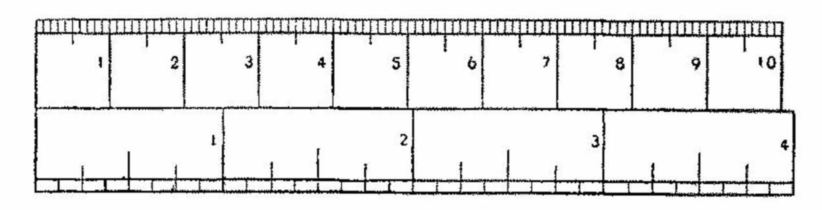


Рис. 1.

ЧАСТЬ I.

ПРОСТѢЙШІЯ ФОРМЫ И ИЗГОТОВЛЕНІЕ МОДЕЛЕЙ.

ЛЕГКІЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ ИЗМѢРЕНІЯХЪ.

ГЛАВА I.

Кубъ.

1. Мы сегодня приступимъ къ изученiю геометрiи. Мы будемъ дѣлать модели и будемъ изучать главныя геометрическiя тѣла. На рисункѣ 2-мъ изображенъ *кубъ*. Вы видали предметы, похожiе на него по формѣ,—отесанные камни, стеклянные прессъ-папье, ящики, постройки или части построекъ. Напримѣръ, колокольня нарисованной на рис. 3-емъ церкви отъ крыши портика до карниза—кубъ.

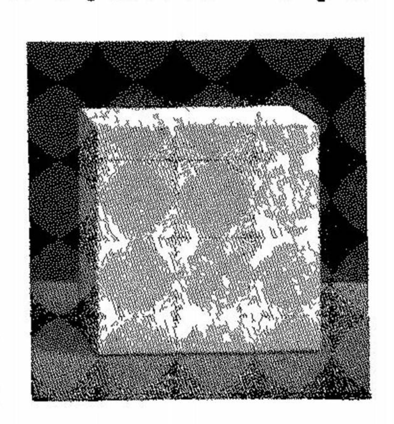


Рис. 2.

Стороны или грани куба всѣ одинаковы. Если вы будете разсматривать одну изъ граней куба на модели, которая поворачивается передъ вами, вы увидите, что его ребра всѣ прямые, одинаковой длины, и тамъ, гдѣ они сходятся вмѣстѣ на вершинахъ, они встрѣчаются перпендикулярно другъ къ другу, такъ что углы ихъ также всѣ одинаковы. Въ геометрiи фигура, которая имѣетъ четыре равныхъ стороны и четыре равныхъ, прямыхъ угла, называется квадратомъ. Вы запомните, что мы говоримъ только объ одной сторонѣ куба.

2. **Какъ начертить прямой уголъ.** Если столяръ хочетъ отпилить кусокъ дерева какъ разъ поперекъ или хочетъ намѣтить прямой уголъ, онъ употребляетъ деревянный или

стальной инструментъ, называемый „наугольникомъ“, который вы, вѣроятно, видали (см рис. 4).

Если вамъ нужно начертить прямой уголъ, то вамъ слѣдуетъ сдѣлать что-нибудь такое, что могло бы замѣнить вамъ столярный наугольникъ.

Возьмите лучше всего кусокъ плотной бумаги, величиною съ развернутый листъ нотной бумаги, сложите его по-



Рис. 3

поламъ, потомъ сложите его еще разъ поперекъ, подъ прямымъ угломъ къ первой складкѣ, такъ, чтобы стороны пришлись какъ разъ одна по другой. Если вы продѣлали все какъ слѣдуетъ, то вы найдете, когда развернете бумагу, что у васъ двѣ прямыя линіи пересѣкли другъ друга подъ *прямымъ угломъ*, или *перпендикулярно*, такъ что углы, образуемые этими пересѣкающимися линіями, совершенно одинаковы

Теперь сложите опять бумагу два раза, какъ раньше, и вы можете употреблять ее, какъ столяръ употребляетъ свой наугольникъ Когда вы сложили бумагу, то, начиная

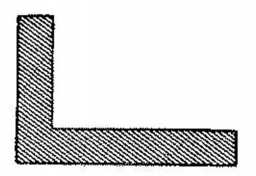


Рис 4 Столярный наугольникъ

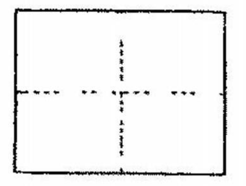


Рис. 5 Прямые углы

отъ вершины угла, вдоль одного ребра, намѣтьте точную копію линейки, данной раньше на страницѣ 10, содержащей таблицу мѣръ длины Если же вы будете измѣрять какими-нибудь другими мѣрами, то нанесите ихъ на вашу бумажку, замѣняющую наугольникъ Теперь мы можемъ приступить къ изготовленію модели куба

3. Какъ сдѣлать діаграмму для куба. Возьмите кусокъ картона 2 дециметровъ 5 миллим (или $8^1/_4$ дюймовъ) длины и 1 децим. 6 сантиметровъ (или $6^1/_2$д)ширины. Приложите вашъ наугольникъ къ нижнему и лѣвому краю бумаги, чтобы убѣдиться, что они прямы и перпендикулярны другъ къ другу.

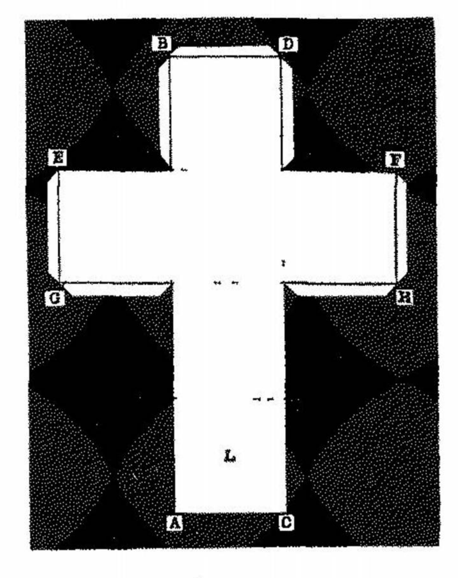


Рис 6

Потомъ, начиная отъ низа бумаги, отъ точки А, которая отстоитъ на 5 сант 5 миллим (или $2^1/_2$ д.) отъ лѣваго угла, проведите прямую линію АВ (см рис. 6-й) перпендикулярно къ нижнему краю бумаги въ 2 децим. (или 8 д) длиною Посмотрите, чтобы точка В была на такомъ же точно разстояніи отъ лѣваго края, какъ и точка А

Затѣмъ, опять начиная отъ низа бумаги, отъ точки C, которая отстоитъ на 5 сантиметровъ отъ A, проведите прямую линію CD, также перпендикулярную къ нижнему краю бумаги и той же самой длины, какъ и AB. Убѣдитесь, что D отстоитъ на 5 сантиметровъ отъ B. Раздѣлите линіи AB и CD каждую на четыре равныя части по 5 сантиметровъ. Проведите линію BD между точками B и D и три точечныхъ или пунктирныхъ линіи, соединяющія точки, полученныя при дѣленіи линіи AB и CD. Эти четыре линіи будутъ перпендикулярны къ AB и CD и будутъ каждая по 5 сантиметровъ длиною.

Такъ ли у васъ вышло?

У васъ теперь четыре квадрата, стороны или бока которыхъ всѣ одинаковой длины. Углы этихъ квадратовъ всѣ прямые.

У третьяго квадрата всѣ стороны точечныя; верхнюю сторону этого квадрата продолжите по прямой линіи до точекъ E и F на 5 сантиметровъ въ обѣ стороны; нижнюю сторону этого же квадрата продолжите точно такъ же до точекъ G и H; точку E соедините съ точкой G, а точку F—съ точкой H. Это будутъ два добавочныхъ квадрата. Провѣрьте ихъ оба сложенной бумагой.

4. **Точечныя линіи и отвороты.** На фигурѣ, которая у васъ теперь получилась, точечныя линіи намѣчены для того, чтобы по нимъ потомъ сгибать фигуру. На трехъ свободныхъ бокахъ верхняго квадрата и на боковыхъ и нижнихъ сторонахъ двухъ квадратовъ, построенныхъ по бокамъ креста, при вырѣзаніи оставьте отвороты, какъ показано на рисункѣ 6. Они понадобятся вамъ при склеиваніи фигуры. Для начала отвороты дѣлаются по 5 миллиметровъ шириною, но послѣ, когда понавыкните клеить, ихъ можно дѣлать у́же. При склеиваніи они должны пойти внутрь модели.

5. **Что такое діаграмма.** У васъ теперь получился рисунокъ, который называется *діаграммою*,—это очертаніе чего-то. Ваша діаграмма—поверхность куба. Діаграмма можетъ быть той же или другой величины, чѣмъ представляемый ею предметъ. Діаграммы въ этой книгѣ показаны меньше, чѣмъ самые предметы.

6. **Какъ вырѣзывать діаграмму.** Діаграмму надо вырѣзать аккуратно, по самому краю, за исключеніемъ тѣхъ мѣстъ, гдѣ должны быть оставлены отвороты. Срѣжьте углы отворотовъ (см. рис. 6).

При помощи линейки и спинки лезвея ножа или чего-нибудь въ этомъ родѣ согните картонъ по точечнымъ линіямъ и по линіямъ около отворотовъ, такъ чтобы карандашныя линіи пришлись внутрь куба, который теперь можетъ быть сложенъ и склеенъ. Постарайтесь поменьше намазывать на отвороты клейстера, чтобъ кубъ лучше склеился и вышелъ аккуратнѣе. Если вашъ картонъ слишкомъ толстъ, то лучше прорѣжьте по складкамъ наполовину толщины картона. Тогда надрѣзы придутся снаружи модели. Болѣе толстый картонъ вамъ придется клеить клеемъ, а не клейстеромъ. Вы можете сдѣлать очень чистые и очень ровные края картона, если по-

ложите его на толстое стекло и вмѣсто ножницъ будете рѣзать картонъ ножомъ по линейкѣ. Послѣднею приклеивается сторона L.

7. 1. Сколько сторонъ у куба? Какой онѣ формы?

2. *Сколько реберъ?*

3. Сколько вершинъ?

4. Плоски ли, ровны ли его стороны? Чтобы *провѣрить, плоская* ли, ровная ли какая-нибудь поверхность, прикладывайте къ ней въ различныхъ направленіяхъ какую-нибудь вещь, которая имѣетъ завѣдомо прямой, ровный край (напримѣръ, край линейки), и посмотрите, вездѣ ли этотъ край касается поверхности; если онъ касается вездѣ, какъ бы вы ни прикладывали линейку, то поверхность ровная. Такую поверхность называютъ плоскостью. Плоскія поверхности тѣла называются также гранями.

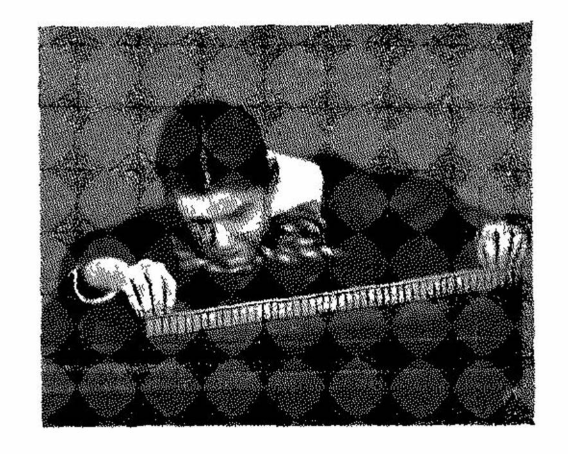


Рис. 7. Провѣрка плоской поверхности.

5. Есть ли въ комнатѣ какіе-нибудь предметы съ плоскими поверхностями? Попробуйте вы провѣрить ихъ линейкой.

6. Сколькими краями ограничивается каждая грань куба?

7. Каждое ребро куба служитъ ли границей только для одной грани? Если не для одной, то для сколькихъ?

8. Если вы умножите число граней на число реберъ, которые ограничиваютъ каждую грань, то на что надо раздѣлить произведеніе, чтобы получить дѣйствительное число реберъ куба?

9. Сколько вершинъ имѣетъ каждая грань куба?

10. Лежитъ ли каждая вершина больше, чѣмъ на одной грани? Если да, то на сколькихъ?

11. Если вы умножите число граней на число вершинъ каждой грани, то насколько вы должны раздѣлить произведеніе, чтобы получить число *различныхъ* вершинъ?

8. **Горизонтальныя поверхности.** Обратите теперь вниманіе на верхнюю доску вашего стола и посмотрите, есть ли у ней такая часть на которой предметы не будутъ ни

скользить ни катиться сами собой, какъ бы гладки они или доска ни были. Если есть, то эта часть доски называется *горизонтальною*. Горизонтъ—это линія, гдѣ кажется, что небо и земля сходятся другъ съ другомъ. Горизон-



Рис. 8. Озеро Шасвенъ въ С. Америкѣ. Горизонтальная плоскость.

тальная поверхность—это такая, которая имѣетъ то же самое направленіе, какъ и плоскость, ограниченная горизонтомъ.

Поверхность небольшого количества спокойной воды горизонтальна, какъ вы это видите на рисункѣ озера. Провѣрить, горизонтальна ли данная поверхность, можно посмотрѣвши, могутъ ли всѣ части этой поверхности касаться въ одно и то же время поверхности спокойно стоящей воды.

12. Какъ вы можете провѣрить, горизонтальна ли верхняя часть доски вашего стола, употребляя для этого стаканъ съ водой?

13. Какъ вы можете назвать теперь обыкновенные полы и потолки?

14. Знаете ли вы полы и потолки гдѣ-нибудь, которые построены не горизонтально?

15. Какъ вы можете провѣрить, горизонтальна ли какая-нибудь туго натянутая веревка?

9. **Параллельныя грани.** Теперь положите вашъ кубъ на горизонтальную часть доски вашего стола. Грань, на

которой стоитъ кубъ, называется *основанiемъ*. Горизонтально ли основанiе куба? Есть ли еще другая грань, которая теперь горизонтальна? Если да, то эти двѣ грани *параллельны* одна другой. Слово *параллельный* состоитъ изъ двухъ греческихъ словъ, означающихъ „лежащiй одинъ вдоль другого". Чтобы провѣрить, параллельны ли двѣ грани какого-нибудь предмета, поверните предметъ такъ, чтобы одна изъ двухъ граней могла стать горизонтальной; тогда, если другая грань станетъ тоже горизонтальной, то обѣ онѣ параллельны другъ другу. Параллельныя грани не могутъ встрѣчаться другъ съ другомъ, какъ бы далеко онѣ ни были продолжены. Кромѣ того, параллельныя грани стоятъ другъ отъ друга на одномъ и томъ же разстоянiи на всемъ своемъ протяженiи. У куба разстоянiе между гранями измѣряется длиною ребра. Попробуйте измѣрить разстоянiе между двумя гранями, начиная отъ каждаго изъ четырехъ угловъ основанiя. Если у васъ окажется, что ребра куба не одной длины, то одно изъ двухъ: или вы сдѣлали ошибку при измѣренiи, или кубъ былъ неаккуратно сдѣланъ, и онъ въ дѣйствительности вовсе не кубъ.

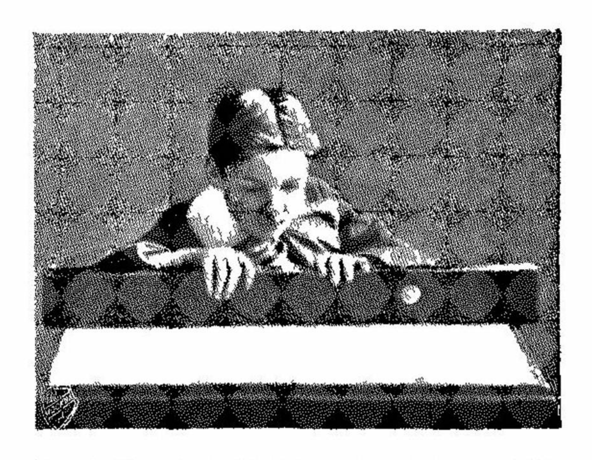


Рис 9. Провѣрка поверхности спиртовымъ ватерпасомъ.

Плотники укладываютъ полы горизонтально. Въ этомъ имъ помогаютъ различные инструменты. Самый обыкновенный изъ нихъ спиртовой уровень, или ватерпасъ. Онъ состоитъ изъ прямого деревяннаго бруска. Въ верхнюю часть бруска вдѣлана слегка изогнутая стеклянная трубка, почти наполненная спиртомъ. Если нижняя сторона бруска лежитъ горизонтально, то пузырекъ воздуха прихо-

дится какъ разъ посрединѣ трубки. Если же поверхность не горизонтальна, то пузырекъ стоитъ ближе къ той сторонѣ ватерпаса, которая *выше*.

10. **Вертикальныя плоскости.** Если вы привяжете къ шнурку тяжесть и приподнимите ее за шнурокъ, то шнурокъ будетъ висѣть *отвѣсно* или *вертикально*.



Рис. 10. Отвѣсъ и вертикальная палка.

Чтобы провѣрить, вертикальна ли какая-нибудь плоскость, отвѣсъ подвѣшиваютъ около нея. Если шнуръ свободно виситъ около плоскости, вездѣ на равномъ разстояніи отъ нея, то плоскость *вертикальна*.

Теперь вы можете сравнить направленіе четырехъ боковыхъ граней куба съ направленіемъ основанія. Положите кубъ на горизонтальную плоскость, какъ раньше, и съ помощью отвѣса узнайте, вертикальны ли его боковыя грани. Что у васъ вышло? Если кубъ вашъ сдѣланъ правильно, его грани должны быть вертикальны, если основаніе его стоитъ горизонтально.

Говорятъ, что боковыя грани куба *перпендикулярны* къ основанію. Двѣ плоскости *перпендикулярны* одна къ другой, если онѣ встрѣчаются подъ прямымъ угломъ. Если одну изъ перпендикулярныхъ плоскостей расположить горизонтально, то другая станетъ вертикальной.

16. Между четырьмя вертикальными гранями куба есть ли такія, которыя перпендикулярны другъ къ другу? Попробуйте перевернуть кубъ такъ, чтобы одна изъ этихъ двухъ плоскостей могла стать горизонтальной.

17. Какое направленіе потолка вашей комнаты?

18. Какое направленіе ея стѣнъ?

19. Какое направленіе пола?

20. Чему параллеленъ потолокъ?

21. Къ чому перпендикуляренъ потолокъ?

22. Какой стѣнѣ параллельна вотъ эта стѣна?

23. Какой стѣнѣ она перпендикулярна?

24. Дверь вертикальна или горизонтальна?

25. Вашъ отвѣтъ на предыдущій вопросъ зависитъ ли отъ того, открыта ли дверь, или закрыта, или полуотворена?

26. Если дверь вращается на петляхъ, перемѣняется ли ея направленіе относительно потолка?

27. А относительно стѣны, къ которой она придѣлана?

28. А относительно другихъ стѣнъ?

29. Можете ли вы держать книгу открытой такъ, чтобы одна крышка переплета была перпендикулярна къ другой и обѣ были бы вертикальны?

30. Можете ли вы сдѣлать такъ, чтобы одна крышка была перпендикулярна къ другой и чтобы ни одна не была вертикальна?

31. Можете ли вы сдѣлать то же самое, но чтобы одна крышка была горизонтальна? Если да, то какое будетъ направленіе другой крышки?

32. Какое различіе между вертикалью и перпендикуляромъ?

33. Какое различіе между горизонталью и параллелью?

11. **Провѣрка геометрическаго равенства.** Теперь мы разсмотримъ и сравнимъ размѣры шести граней куба. Поставьте кубъ на чистый листъ бумаги, одной гранью прямо противъ себя, и обведите карандашомъ его основаніе. Затѣмъ, не поднимая куба, поверните его такъ, чтобы другая грань была противъ васъ, и сдѣлайте другое очертаніе основанія въ его новомъ положеніи, прямо по первому очертанію. Поверните кубъ еще два раза и сдѣлайте еще два очертанія.



Рис. 11 Очерчиваніе основанія куба.

При аккуратномъ очерчиванiи и при вѣрно построенномъ кубѣ всѣ четыре очертанiя будутъ казаться какъ одно. Если вы перевернете кубъ на другую грань, то увидите, что вы можете сдѣлать это очертанiе какъ разъ по первому очертанiю и опять во всѣхъ четырехъ различныхъ положенiяхъ.

34. Какъ же, слѣдовательно, относятся шесть граней куба одна къ другой по формѣ?

35. Какъ относятся шесть граней куба одна къ другой по величинѣ?

36. Сколько сторонъ ограничиваетъ каждую грань?

37. Если вы умножите число сторонъ каждой грани на число граней, произведенiе будетъ ли числомъ реберъ куба? Объясните свой отвѣтъ.

38. Двѣ стороны каждаго угла каждой грани расходятся ли между собой, образуя одинаковые углы, или нѣтъ?

39. Такъ ли онѣ расходятся, какъ горизонтальная туго натянутая бечевка отходитъ отъ привѣшенной за одинъ конецъ бечевки отвѣса?

40. Ребра куба всѣ ли одной длины?

41. Грани куба квадраты ли, или нѣтъ?

42. Скажите, сколько граней у куба, какая ихъ форма и сравнительная величина?

43. Сколько граней въ кубѣ параллельныхъ какой-нибудь одной грани?

44. Сколько граней перпендикулярны къ какой-нибудь одной грани?

45. Сколько реберъ параллельны какому-нибудь одному ребру?

46. Сколько реберъ встрѣчаются перпендикулярно съ однимъ какимъ-нибудь ребромъ?

47. Можете ли вы такъ держать кубъ, чтобы восемь реберъ были горизонтальны?

48. Такъ, чтобы только четыре были горизонтальны?

49. Такъ, чтобы не было ни одного горизонтальнаго ребра?

50. Такъ, чтобы четыре ребра были вертикальны?

51. Такъ, чтобы не было ни одного вертикальнаго ребра?

52. На рисункѣ 12 нарисованы гребцы на рѣкѣ. Сколько параллельныхъ линiй видите вы здѣсь?

53. Если гребцы будутъ дружно грести, будутъ ли эти линiи оставаться параллельными?

12. **Три геометрическихъ измѣренiя.** Когда вы измѣряете разстоянiе между основанiемъ и верхней гранью куба, говорятъ, что вы измѣряете *толщину* куба, *высоту* или *глубину* его.

54. Когда вы говорите о толщинѣ предметовъ?
55. Объ ихъ высотѣ?
56. Объ ихъ глубинѣ?

Теперь положите кубъ, какъ прежде, горизонтально, такъ чтобы одна грань лежала прямо противъ васъ. Вы увидите, что двѣ боковыхъ грани уходятъ отъ васъ прочь и въ то же время параллельны одна другой. Разстояніе между этими двумя гранями называется *длиною* куба.

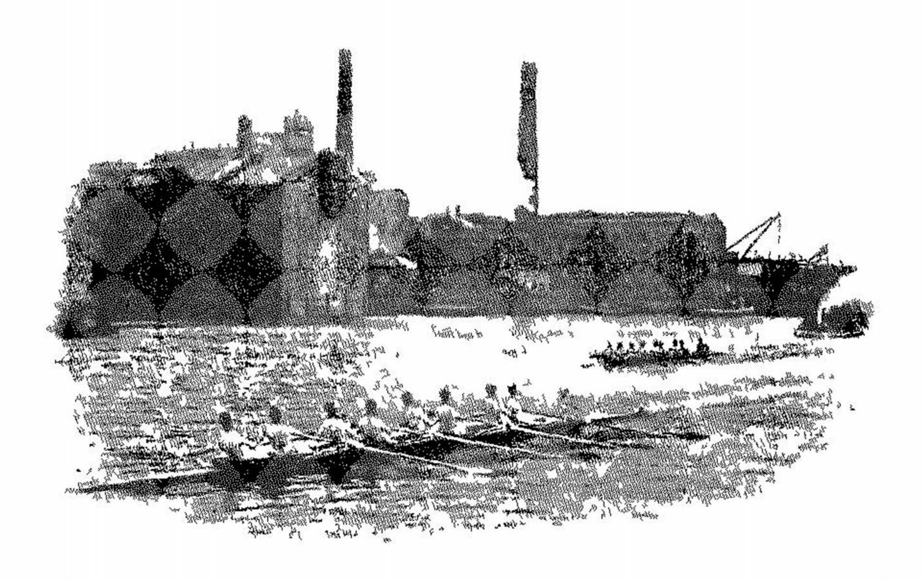


Рис. 12. Гребцы на Темзѣ.

Наконецъ, у куба задняя грань параллельна передней. Разстояніе между этими двумя гранями называется *шириною* куба.

Теперь вы можете измѣрить кубъ по тремъ направленіямъ — по длинѣ, ширинѣ и высотѣ. Если вы измѣрите кубъ и если кубъ былъ аккуратно сдѣланъ (т.-е. если онъ дѣйствительно вышелъ у васъ кубомъ), то вы найдете, что всѣ три измѣренія куба равны другъ другу.

13. **Площади.** Начертите на бумагѣ квадратъ со стороною въ 5 сантиметровъ. Раздѣлите каждую сторону на

части по 1 сантиметру и проведите линіи, соединяющія противоположныя точки дѣленія. Нѣсколько такихъ линій показаны на рис. 13.

57. Какую форму имѣютъ части, на которыя вы раздѣлили вашъ квадратъ?

58. На сколько частей вы его раздѣлили?

Начертите квадратъ со сторонами въ 3 сантиметра; проведите дѣлящія линіи, какъ прежде, и сосчитайте число частей, на которыя раздѣлился квадратъ.

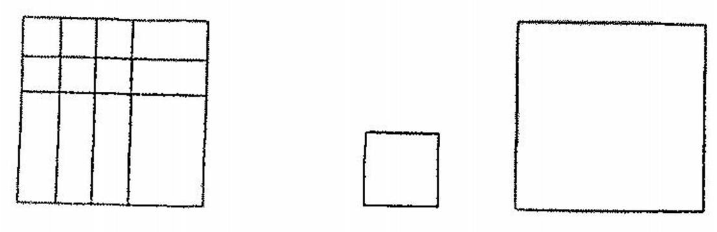


Рис. 13. Рис 14. Квадратный сантиметръ (кв. см.). Рис. 15. Квадратный дюймъ (кв. д.).

Сдѣлайте то же самое съ квадратомъ, имѣющимъ сторону въ 4 сантиметра длиною.

Въ этихъ случаяхъ вы измѣряли *площадь* квадратовъ. Площадь измѣряется площадью малыхъ квадратовъ, на которые большая площадь раздѣлена.

Если каждая сторона одного изъ малыхъ квадратовъ имѣетъ 1 сантиметръ въ длину, то онъ называется *квадратнымъ сантиметромъ*, и про большой квадратъ говорятъ, что онъ имѣетъ столько-то квадратныхъ сантиметровъ.

Если каждая сторона малаго квадрата имѣетъ 1 дюймъ въ длину, то его называютъ *квадратнымъ дюймомъ*, а про большой квадратъ говорятъ, что въ немъ столько-то квадратныхъ дюймовъ.

Если бы квадратъ былъ очень большой, напримѣръ, полкомнаты, то, чтобы его измѣрить, надо раздѣлить на квадраты, имѣющіе стороны въ 1 аршинъ, 1 метръ или 1 футъ, и малые квадраты будутъ называться квадратнымъ метромъ, квадратнымъ аршиномъ или квадратнымъ футомъ.

Можете ли вы теперь дать правило для вычисленія величины квадрата, не раздѣляя его дѣйствительно на малые квадраты, если вы знаете длину одной изъ его сторонъ?

Сосчитайте, чему равна площадь всей поверхности вашего куба.

При измѣреніи площадеи вы не принимаете въ расчетъ вопроса о толщинѣ предмета; поверхности мѣряютъ только въ длину и ширину; говорятъ, что онѣ имѣютъ только два измѣренія — длину и ширину. Площади не имѣютъ толщины, площадь—это только поверхность, внѣшность тѣлъ

14. **Объемы.** Теперь мы измѣримъ величину куба. Если бы вашъ кубъ былъ плотный и былъ бы сдѣланъ изъ такого вещества, которое легко бы рѣзалось (напримѣръ, изъ сырой глины или изъ мыла), и если бы вы каждое ребро его раздѣлили на пять равныхъ частей, то кубъ разрѣзался бы на слои, а каждый слой разрѣзался бы на маленькіе кубики.

59. Можете ли вы сказать, сколько бы получилось у вас слоевъ?

60. Можете ли вы сказать, сколько получилось бы маленькихъ кубиковъ въ каждомъ слоѣ?

61. Можете ли вы сосчитать, сколько было бы маленькихъ кубиковъ въ большомъ кубѣ?

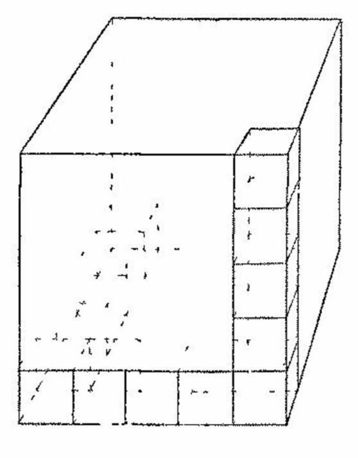


Рис. 16.

Каждый изъ этихъ маленькихъ кубиковъ называется *кубическимъ сантиметромъ* (куб. см.), т.-е кубомъ, ребро котораго равняется 1 сантиметру. Нѣсколько кубическихъ сантиметровъ показано на рисункѣ. Вамъ не трудно будетъ самимъ склеить кубическій сантиметръ изъ бумаги, пользуясь діаграммой, данной въ началѣ этой главы.

62. Сколько надо взять кубиковъ равныхъ по величинѣ сдѣланному вами, чтобы получить кубъ съ ребромъ вдвое большей длины? Можетъ-быть, вы можете сосчитать?

63. Сколько надо взять вашихъ кубовъ, чтобы составить кубъ съ ребромъ въ три раза болѣе длиннымъ, чѣмъ у вашего куба?

64. Сколько кубическихъ сантиметровъ содержится въ кубѣ, ребро котораго равно 2 сантиметрамъ.

65. Сколько куб. сантиметровъ содержится въ кубѣ, ребро котораго равно 3 сантиметрамъ?

Отвѣчая на эти вопросы, вамъ приходится находить *объемы* кубовъ. *Объемъ* куба есть число кубическихъ сантиметровъ, метровъ, дюймовъ, футовъ и т. д., на которые онъ можетъ быть раздѣленъ.

66. Можете ли вы дать правило для вычисленія объема куба, если вы знаете длину его ребра?

Площадь квадрата равняется длинѣ его стороны, умноженной на самоё себя.

Площадь квадрата $= s \times s$.

Объемъ куба равняется длинѣ его ребра, дважды умноженной на самоё себя.

Объемъ куба $= s \times s \times s$.

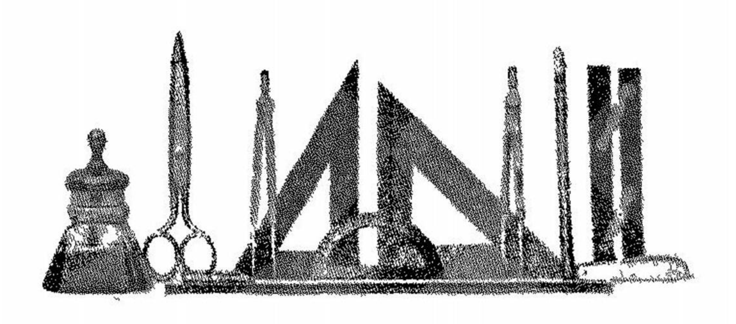


Рис. 17 Клейстеръ Ножницы Циркуль Треугольники Циркуль Карандашъ
Резинка Транспортиръ. съ Пара линейка
Линейка съ карандашомъ. Ножикъ.
дѣленiями

ГЛАВА II.

Параллелепипедъ.

1. На рисункѣ 18 изображенъ *параллелепипедъ*. Слово „параллелепипедъ“ означаетъ „имѣющій плоскія, параллельныя поверхности“. У параллелепипеда шесть граней, какъ и у куба. Вѣдь кубъ въ дѣйствительности есть одинъ изъ видовъ параллелепипеда; но обыкновенно параллелепипедомъ называются тѣ тѣла, грани которыхъ не квадраты.

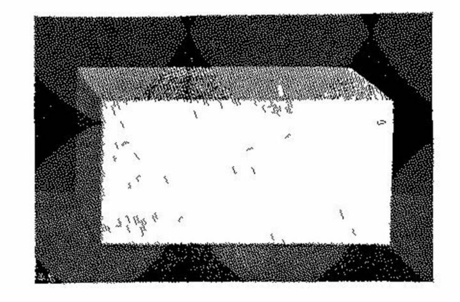


Рис. 18. Параллелепипедъ.

Если вы будете смотрѣть на грань параллелепипеда, обращенную къ вамъ, то вы увидите, что у ней, какъ у квадрата, четыре стороны, встрѣчающіяся другъ съ другомъ подъ прямыми углами; но отличается она отъ квадрата тѣмъ, что стороны этой грани не всѣ одинаковы, а равны между собой только противоположныя стороны. Такая фигура называется *прямоугольникомъ*.

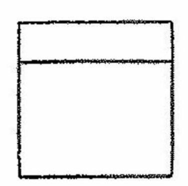


Рис. 19.

Начертите квадратъ со стороной произвольной длины, напримѣръ 5 сант. (или 2 д.), и вырѣжьте его изъ бумаги. При помощи вашей сложенной бумаги съ дѣленіями проведите поперекъ прямую линію перпендикулярно къ сторонамъ, которыя она пересѣкаетъ. Потомъ разрѣжьте квадратъ по линіи, которую вы только-что провели. Каждая изъ полученныхъ частей будетъ прямоугольникъ.

Обратите вниманіе, что противоположныя стороны каждаго прямоугольника параллельны; и если вы сложите прямоугольникъ такъ, что противоположныя стороны лягутъ одна на другую, вы увидите, что онѣ равны.

Вы можете разрѣзать эти прямоугольники на еще меньшіе прямоугольники, проведя дѣлящія линіи перпендикулярно къ сторонамъ, которыя онѣ пересѣкаютъ. Изъ прямоугольника можно снова получить квадратъ, обрѣзавши прямоугольникъ такъ, чтобы всѣ стороны были равны.

Параллелепипедъ часто встрѣчается въ разныхъ частяхъ построекъ. Напримѣръ, на рисункѣ 20 изображено зданіе. Мы легко отыщемъ въ немъ пять различныхъ параллелепипедовъ: три изъ нихъ составляютъ корпусъ зданія, одинъ трубу и одинъ основаніе купола. Всѣ стороны, за исклю-

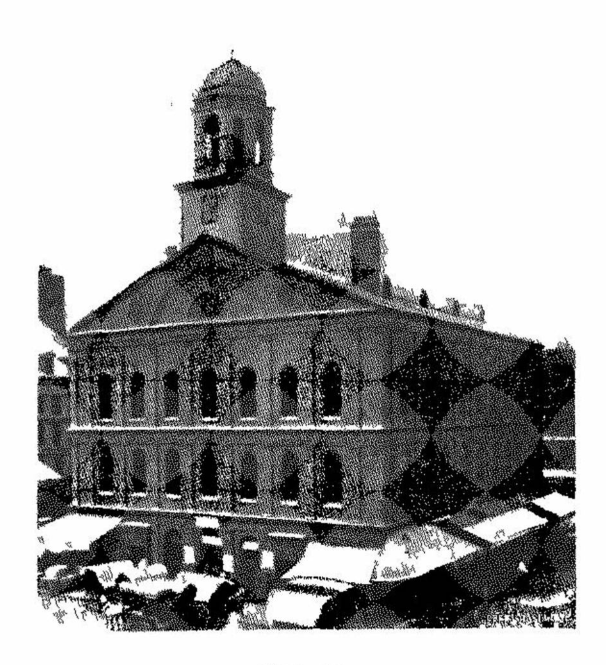


Рис 20.

ченіемъ двухъ на куполѣ, прямоугольники; такимъ образомъ мы имѣемъ здѣсь пять прямоугольныхъ параллелепипедовъ

Теперь мы сдѣламъ модель параллелепипеда.

2 Для діаграммы параллелепипеда надо взять кусокъ бумаги величиною 25 сант. 5 миллим $\times$21 сант ($10\frac{1}{4}$ д $\times$ $8\frac{1}{2}$ д.) AB и CD, каждая по 25 сант (или 10 д) длиною и на 10 сант. (или 4 д) одна отъ другой, т.-е AC и BD будутъ у васъ длиною каждая по 10 сант (4 д).

AB и CD дѣлятся на части слѣдующимъ образомъ, начиная отъ A и C 5 см (2 д.), 7 см 5 мм (3 д.), 5 см (2 д.) и 7 см. 5 мм. (3 д) EF и GH имѣютъ каждая по 20 см (8 д.) въ длину и выходятъ на 5 см (3 д) за линіи AB и CD, которыя онѣ пересѣкаютъ въ первыхъ и вторыхъ точкахъ

дѣленія, считая отъ A и C въ EG и FH въ каждой по 7 см. 5 мм (3 д).

Всѣ пересѣкающіяся линіи перпендикулярны другъ къ другу.

Затѣмъ при вырѣзаніи оставьте въ тѣхъ же мѣстахъ, какъ и при вырѣзаніи діаграммы куба, отвороты и склейте параллелепипедъ

Когда у васъ будетъ построенъ параллелепипедъ, постарайтесь отвѣтить на слѣдующіе вопросы:

3 1. Сколько граней имѣетъ это тѣло?

2. Сколько реберъ?

3. Сколько вершинъ?

4 Если положить тѣло одной гранью горизонтально, то будутъ ли еще горизонтальныя грани? Если да, то сколько?

5. Какое другое названіе можно дать этимъ гранямъ сообразно съ ихъ направленіемъ одна къ другой?

6. Если основаніе параллелепипеда горизонтально, то будутъ ли у него вертикальныя грани? Если да, то сколько? Какое другое названіе можно дать этимъ гранямъ за ихъ направленіе по отношенію къ основанію?

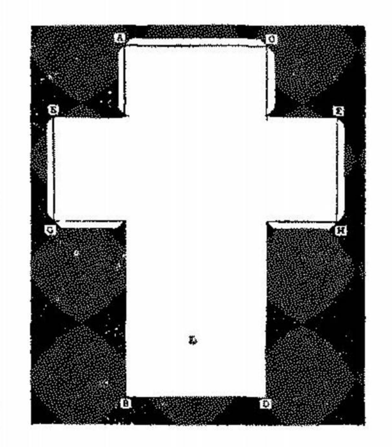


Рис. 21

7. Правда ли, что каждая грань этого тѣла ограничена двумя парами параллельныхъ сторонъ?

8 Правда ли, что пересѣкающіяся между собой стороны каждой грани перпендикулярны другъ къ другу?

9. Какъ бы вы отвѣтили на послѣдніе два вопроса относительно граней куба?

10. Будутъ ли грани новаго тѣла квадраты? Если нѣтъ, то какую разницу вы видите между ними и квадратомъ?

4. **Четыреугольники.** Всякая фигура, которая ограничена четырьмя сторонами, называется четверосторонникомъ, или *четыреугольникомъ*. Такъ, квадратъ и прямоугольникъ есть четыреугольники. Обратите вниманіе, что углы квадрата и прямоугольника—прямые углы; но если вы перемѣните направленіе двухъ противоположныхъ сторонъ по отношенію къ двумъ другимъ, то въ каждой фигурѣ не останется уже ни одного прямого угла, а будетъ по два острыхъ и по два тупыхъ Это то, что называется „перекосить“ фигуру. Если вы перекосите квадратъ и прямоугольникъ, то

вы получите два другихъ четыреугольника: изъ квадрата вы получите *ромбъ*, а изъ прямоугольника—*параллелограммъ*.

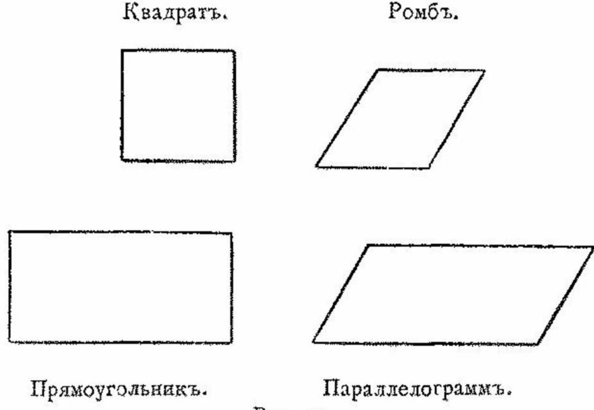


Рис. 22.

Слово „ромбъ" означаетъ „нѣчто, что можетъ быть вращаемо вокругъ", такъ какъ онъ по формѣ нѣсколько напоминаетъ употреблявшееся въ древности веретено.

Слово „параллелограммъ" значитъ „параллельные знаки или линіи".

У ромба всѣ стороны равны, но углы его не прямые.

У параллелограмма только противоположныя стороны равны, а углы такъ же всѣ не прямые.

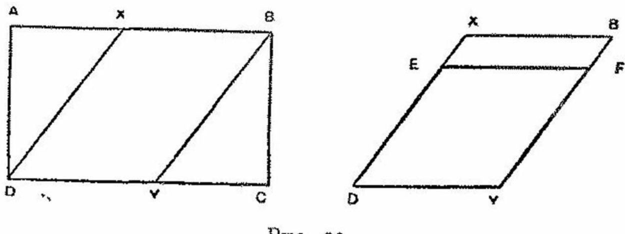


Рис. 23.

Ромбъ и параллелограммъ могутъ быть получены изъ прямоугольника посредствомъ разрѣзыванія.

Начертите прямоугольникъ ABCD, стороны котораго пусть будутъ 7 сант. и 4 сант. ($3^1/_2$ д. и 2 д.) и вырѣжьте его изъ бумаги.

Начиная отъ двухъ противоположныхъ вершинъ A и C, отмѣряйте на противоположныхъ сторонахъ равныя длины AX и CY, по 3 см. ($1^1/_2$ д.), и проведите линіи DX, BY. Затѣмъ разрѣжьте по линіямъ DX и BY. Оставшаяся часть DYBX есть параллелограммъ. Вы вы-

дите, что противоположныя стороны параллельны; а измѣривши ихъ, вы найдете, что противоположныя стороны также и равны. Если сдѣлаете все аккуратно, то длина этихъ сторонъ будетъ 4 сантиметра и 5 сантиметровъ (2 д. и $2^1/_2$ д.).

Затѣмъ, начиная отъ обоихъ концовъ одной изъ короткихъ сторонъ, отмѣрьте по длинѣ сторонъ XE и BF 1 см. ($^1/_2$ д.), проведите линію EF и, разрѣзавши параллелограммъ по этой линіи, раздѣлите его на двѣ части. Меньшая изъ этихъ частей будетъ также параллелограммъ, а большая часть EFYD будетъ ромбъ.

Всѣ эти четыре фигуры—квадратъ, прямоугольникъ, ромбъ и параллелограммъ — сходны въ томъ, что у всѣхъ у нихъ противоположныя стороны параллельны и равны, и по этимъ признакамъ имъ иногда даютъ общее названіе параллелограммовъ.

Въ какомъ частномъ случаѣ прямоугольникъ похожъ на квадратъ?

Въ какомъ частномъ случаѣ ромбъ похожъ на квадратъ?

Чѣмъ отличается прямоугольникъ отъ квадрата?

Чѣмъ отличается ромбъ отъ квадрата?

Возьмите кусокъ веревки, завяжите на ней три узла и уложите ее на столѣ въ формѣ квадрата, чтобы узлы приходились на его вершинахъ. Потомъ перемѣните квадратъ въ ромбъ, имѣющій тѣ же узлы на вершинахъ.

Уложите ту же веревку въ формѣ прямоугольника, съ узлами на вершинахъ. Будутъ ли это тѣ же самые узлы, которые вы употребляли для квадрата?

Можете ли вы превратить прямоугольникъ въ параллелограммъ, не завязывая новыхъ узловъ?

Вотъ еще двѣ формы четыреугольниковъ — *трапеція* и *трапецоидъ*.

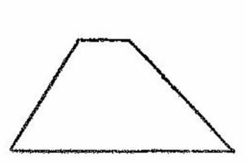


Рис. 24. Трапеція.

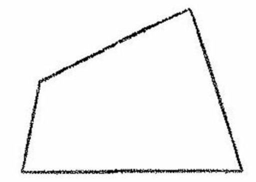


Рис. 25. Трапецоидъ.

Трапеція имѣетъ двѣ параллельныхъ стороны и двѣ непараллельныхъ. Слово „трапеція“ означаетъ „столикъ“.

Трапецоидъ не имѣетъ параллельныхъ сторонъ. Слово „трапецоидъ" значитъ „похожій на столъ".

Очевидно ли для васъ, какъ разрѣзываніемъ превратить параллелограммъ въ трапецію?

Сколько разрѣзовъ вы должны сдѣлать, чтобы превратить параллелограммъ въ трапецоидъ?

Назовите каждый изъ нарисованныхъ на рис. 26 четыреугольниковъ своимъ именемъ, дѣлая опредѣленія на глазъ.

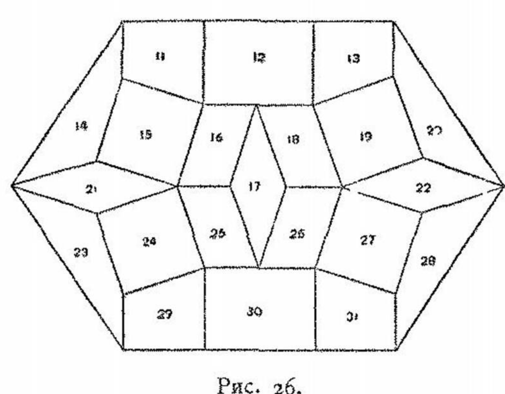


Рис. 26.

32. Когда вы измѣряли кубъ, что вы нашли относительно его измѣреній?

33. Три измѣренія вашего прямоугольнаго параллелепипеда равны ли всѣ другъ другу?

34. Какова длина параллелепипеда, т. е наибольшее его измѣреніе?

35. Какова ширина?

36. Какова толщина?

37. Какъ бы вы могли положить тѣло такъ, чтобы его толщина или высота была наибольшимъ измѣреніемъ, а его длина была бы наименьшимъ измѣреніемъ?

38. Каковы измѣренія двухъ наибольшихъ граней этого тѣла?

39. Средней величины сторонъ?

40. Наименьшей величины сторонъ?

41. Какъ расположены тѣ стороны, которыя равны другъ другу?

5. **Линіи.** Мы теперь болѣе основательно разсмотримъ ребра. Ребра — это линіи, и только они — дѣйствительныя „линіи", въ геометрическомъ смыслѣ слова. „Линія" въ геометріи имѣетъ только одно измѣреніе — длину; ширины и толщины она не имѣетъ. *Однако вы можете* изобразить линію, проводя по поверхности перомъ или карандашомъ. Границы поверхности есть линіи; гдѣ бы ни встрѣчались двѣ поверхности, тамъ всегда есть линія, общая имъ.

Прямая линія образуется въ томъ случаѣ, когда встрѣ-

чаются двѣ плоскости. Такимъ образомъ, ребра куба и параллелепипеда всѣ — прямыя линіи. Геометрическую прямую линію можетъ также изобразить туго натянутая веревка или шнурокъ. Замѣтьте, что прямая линія выдерживаетъ одно и то же направленіе по всей своей длинѣ.



Рис. 27. Прямая линія.

Изъ нѣсколькихъ прямыхъ линій составляется то, что называется ломаной линіей.

6. **Длина прямой линіи** измѣряется прикладываніемъ къ ней какой-нибудь единицы, которая можетъ быть выбрана, смотря по удобству, напримѣръ: сантиметръ, метръ, километръ, дюймъ, футъ, миля. Для короткихъ линій удобенъ дюймъ и сантиметръ, для длинныхъ—миля или километръ.

На практикѣ, при дѣйствительныхъ измѣреніяхъ, метрическая система оказывается проще всего для употребленія. Однако вы должны пріучить себя дѣлать измѣренія по обѣимъ системамъ, сначала опредѣляя размѣры на глазъ, а затѣмъ измѣряя точно линейкой съ футами, дюймами, метрами или сантиметрами.

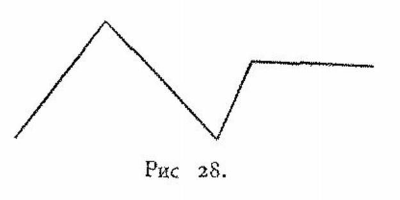


Рис 28.

42. Опредѣлите на глазъ длину слѣдующихъ линій и потомъ провѣрьте выше предположеніе точнымъ измѣреніемъ.

Прямая линія есть кратчайшая, какая можетъ быть начерчена между двумя точками. Пусть какой-нибудь мальчикъ держитъ веревку за концы у черной доски такъ, чтобы она какъ можно меньше отклонялась. Пусть другой мальчикъ смѣряетъ разстояніе между концами линейкой (у которой край предполагается прямымъ) и сравнитъ результатъ съ длиною веревки.

Съ самаго начала вы измѣряли ребра тѣлъ, какъ будто вы знали, что они прямыя линіи. Это было вѣрно; плоскости даютъ всегда прямыя линіи, когда онѣ встрѣчаются.

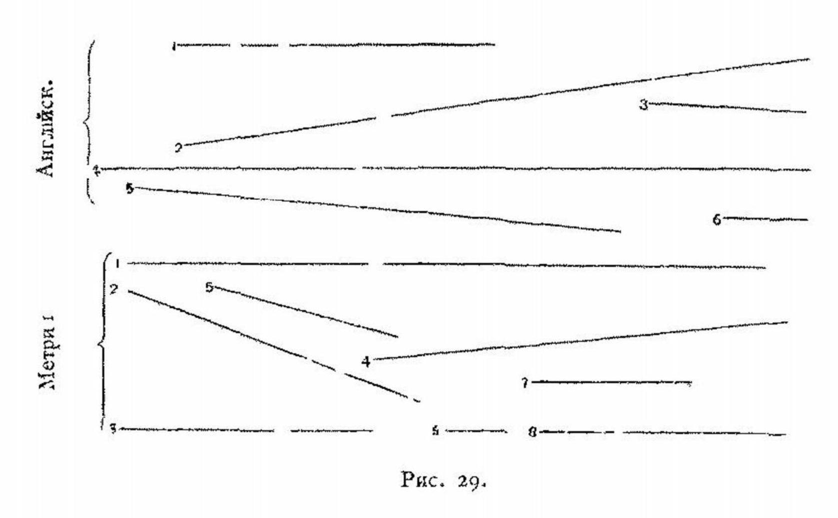


Рис. 29.

Линіи обыкновенно обозначаются двумя буквами или двумя цифрами, помѣщаемыми по концамъ линіи. Иногда же обозначаютъ и посредствомъ одной буквы или цифры, которую ставятъ гдѣ-нибудь надъ линіей.

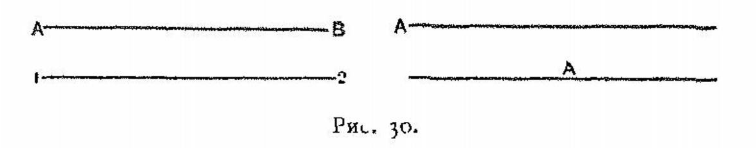


Рис. 30.

7. Предположите, что вы хотите начертить линію опредѣленной длины.

Если длина этой линіи дана въ дециметрахъ или дюймахъ, вы можете начертить линію при помощи линейки, имѣющей по краю дѣленія, какія представлены на страницѣ 10-й, содержащей таблицы длины. Это—задача, которая была предложена еще тогда, когда мы только начинали проходить эту книгу.

Если длина опредѣленной линіи не дана въ числахъ, но показана другой линіей, длина которой въ числахъ не из-

вѣстна, вы можете выполнить задачу однимъ изъ двухъ способовъ.

Предположите, что вамъ дано начертить линію, равную длинѣ AB.

Прежде всего вы можете смѣрить длину AB посредствомъ линейки и тогда провести другую линію той же длины. Если вы найдете, что AB имѣетъ 3 сантиметра длины, то вамъ нужно будетъ только провести другую линію въ 3 сантиметра длиною, и задача будетъ рѣшена Этотъ способъ называется „рѣшить задачу ариѳметически". Трудность можетъ быть въ томъ, что длина AB можетъ не точно соотвѣтствовать какому-нибудь разстоянію, показанному на вашей линейкѣ съ дѣленіями. Слѣдующій способъ обходитъ это затрудненіе и потому удобнѣе.

A B

Рис 31.

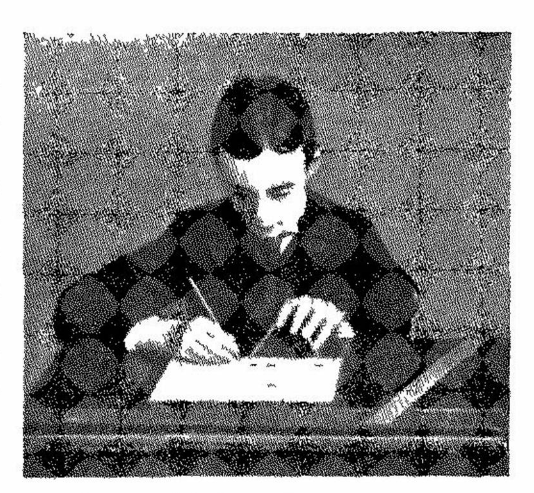


Рис. 32. Измѣреніе линіи циркулемъ.

По второму способу вамъ не надо находить длины AB въ числахъ, но вмѣсто этого вы можете отмѣтить на полоскѣ бумаги, которая имѣетъ ровный край, двѣ точки, указывающія длину AB; и тогда, проведя линію какой-нибудь длины, вы можете отмѣтить на ней разстояніе, указанное двумя точками на бумажкѣ.

Есть также инструментъ, который употребляется для этой же цѣли; онъ называется „циркуль". Это двѣ ножки, раздвигающіяся на шарнирѣ. Разстояніе между заостренными концами ножекъ указываетъ длину линіи.

Такой способъ измѣрить линію называется „рѣшить задачу геометрически".

43. Начертите линіи, равныя указаннымъ, при помощи мѣрной линейки.

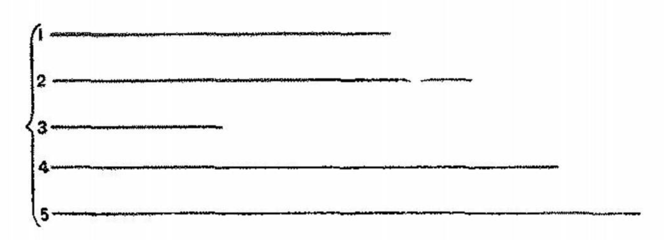


Рис. 33.

44. Начертите линіи, равныя указаннымъ, „геометрическимъ" способомъ

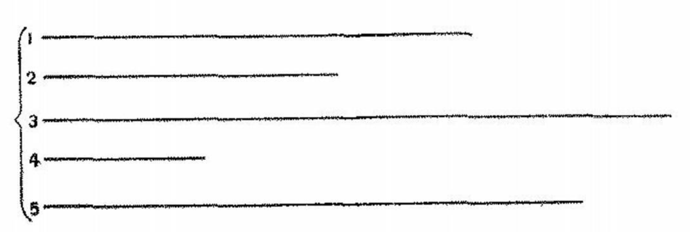


Рис. 34.

8. **Площадь прямоугольника.** Начертите на бумагѣ прямоугольникъ 10 сантиметровъ длины и 5 сантиметровъ ширины. Представьте себѣ, что это—одна изъ граней вашего параллелепипеда. Раздѣлите стороны на части по 1 сантиметру длиною и проведите линіи, соединяющія противоположныя точки дѣленія, какъ показываетъ чертежъ.

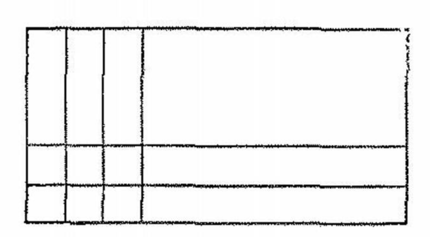


Рис. 35.

45. Какую форму имѣютъ части, на которыя раздѣленъ прямоугольникъ?

46. Сосчитайте число этихъ частей.

47. Можете ли вы сказать, что этихъ частей десять рядовъ, по пяти въ каждомъ ряду?

48. Вѣрно ли, что это также пять рядовъ, по десяти частей въ каждомъ?

49. Какъ вы думаете, чему равна площадь этого прямоугольника?

Теперь начертите на бумагѣ прямоугольникъ въ 10 сантиметровъ длины и 7 сантиметровъ 5 миллиметровъ ширины. Это другая грань вашего параллелепипеда. Раздѣлите двѣ

длинныя стороны, AB и CD, на части по 1 см. длины. Затѣмъ, начиная отъ A и B, отмѣтьте на AC и BD части по 1 сантиметру длины, сколько ихъ помѣстится. Проведите линію, какъ раньше, соединяя противоположныя точки дѣленія.

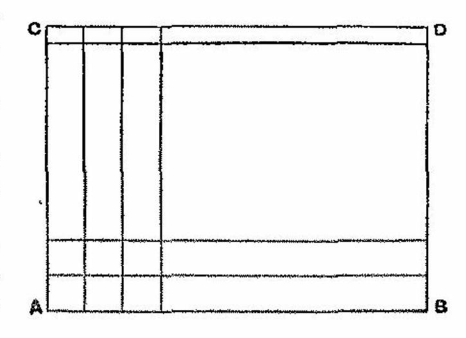


Рис. 36.

50. Сосчитайте число образовавшихся такимъ образомъ цѣлыхъ квадратовъ.

51. Сосчитайте число оставшихся частей.

52. Сколько такихъ частей надо взять, чтобы составить одинъ цѣлый квадратъ?

53. Сколько квадратовъ образуютъ эти части, если ихъ отрѣзать и приложить другъ къ другу?

54. Можете ли вы сказать, что здѣсь десять рядовъ по семи съ половиной квадратовъ въ каждомъ?

55. Что бы вы сказали о площади этого прямоугольника?

Наконецъ, начертите прямоугольникъ 7 сантиметровъ 5 миллиметровъ длины и 5 сантиметровъ ширины; раздѣлите его, какъ прежде, на квадраты и части квадратовъ. Это—третья сторона параллелепипеда.

56. Сосчитайте число цѣлыхъ квадратовъ.

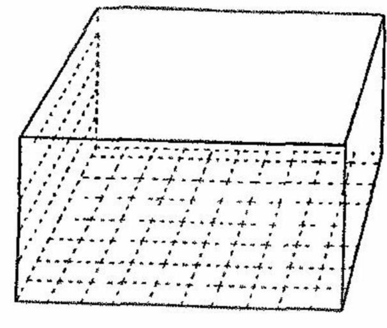
57. Сосчитайте число другихъ частей.

58. Что бы вы сказали о площади этого прямоугольника?

59. Можете ли вы дать правило для вычисленія площади прямоугольника, когда вы знаете его длину и ширину?

60. Высчитайте площадь всей полной поверхности вашего параллелепипеда.

9. **Объемъ параллелепипеда**. Объемъ параллелепипеда вы найдете тѣмъ же способомъ, какъ и объемъ куба, раздѣливши тѣло на маленькіе кубики. Высота показываетъ число слоевъ кубиковъ, а площадь основанія показываетъ число слоевъ въ каждомъ кубикѣ.


Рис. 37.

61. Основанie вашего параллелепипеда имѣетъ 10 сантиметровъ въ длину и $7^1/_2$ сантиметровъ въ ширину. Сколько квадратныхъ сантиметровъ въ этой площади?

62. Сколько кубическихъ сантиметровъ поэтому заключается въ одномъ слоѣ?

63. Высота 5 см. Сколько поэтому здѣсь слоевъ?

64. Сколько же всего кубическихъ сантиметровъ въ объемѣ тѣла?

65. Можете ли вы дать правило для вычисленiя объема параллелепипеда, когда вы знаете его измѣренiя?

10. **Практическiй опытъ.** Вамъ будетъ интересно теперь сравнить объемы тѣлъ, которые вы построили. Такъ какъ ребра вашего куба имѣютъ по 5 сантиметровъ длины, то объемъ его равняется 125 кубическимъ сантиметрамъ. Такъ какъ измѣренiя вашего параллелепипеда были 10 см., $7^1/_2$ см. и 5 см., то его объемъ равняется 375 кубич. сантиметрамъ. Значитъ, онъ ровно въ три раза больше нашего куба. Параллелепипедъ, слѣдовательно, въ три раза больше, чѣмъ кубъ, и вы можете это провѣрить, наполняя кубъ пескомъ, опилками, водою и т. п. и пересыпая содержимое въ параллелепипедъ до тѣхъ поръ, пока онъ не наполнится.

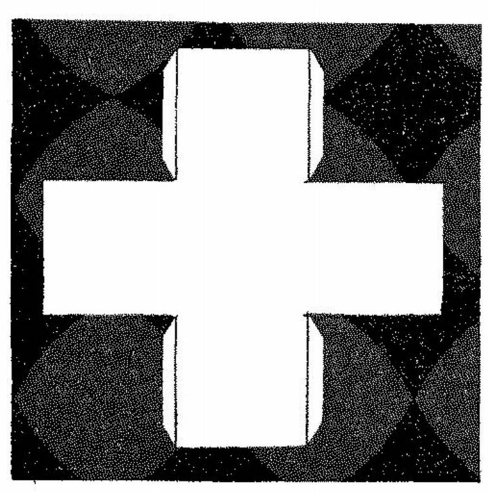


Рис. 38. Дiаграмма для измѣрительнаго куба.

Для этого хорошо было бы приготовить особыя тѣла съ одной открытой гранью. Если вы тѣла покроете слоемъ густого лака изнутри и снаружи, то ихъ можно будетъ наполнять водою. Когда вы изготовите такiя тѣла, тщательно сохраняйте ихъ; они вамъ будутъ нужны для будущихъ измѣрительныхъ опытовъ.

Площадь прямоугольника равна произведенiю его двухъ измѣренiй.

Площадь прямоугольника $= a \times b$

Объемъ параллелепипеда равенъ произведенiю его трехъ измѣренiй.

Объемъ параллелепипеда $= a \times b \times c.$

ГЛАВА III.

Призма.

1. Это тѣло называется *призмой*. Призма значитъ „нѣчто распиленное", то-есть призма есть часть другого тѣла. Когда вы сдѣлаете призму, вы увидите, что есть тѣло, часть котораго она составляетъ. Грань, обращенная прямо къ намъ,— квадратъ; другая грань, которая протягивается назадъ вправо, тоже квадратъ; грань, лежащая влѣво, — прямоугольникъ.

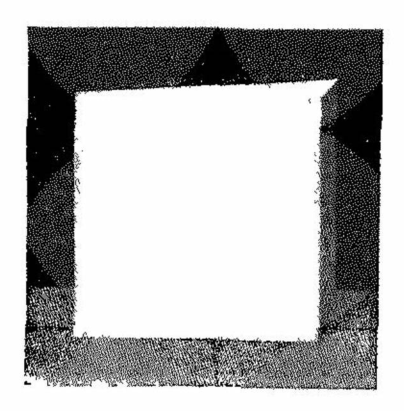


Рис 39.

Верхняя и нижняя грани— треугольники. Они составляютъ „основанія" призмы.

Начертите квадратъ со стороною въ 5 см (2 д.) и вырѣжьте его изъ бумаги, проведите линію съ угла на уголъ и потомъ разрѣжьте квадратъ на двѣ части по этой линіи, каждая часть будетъ треугольникъ, представляющій верхнюю и нижнюю грани призмы.

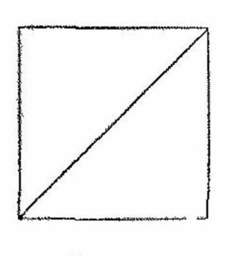


Рис. 40.

Вы можете видѣть примѣры треугольныхъ призмъ на двухъ слуховыхъ окнахъ на крышѣ дома, изображеннаго на рис 41. Если вы вообразите себѣ горизонтальную плоскость, дѣлящую окна на двѣ части, то верхняя часть каждаго окна будетъ треугольной призмой, въ родѣ нарисованной на рис. 39.

Основаніями будутъ вертикальные треугольники подъ крышками, они все-таки называются „основаніями", несмотря на то, что призмы здѣсь не стоятъ на нихъ. Крыша зданія образуетъ прямоугольныя плоскости, а фасадъ постройки и воображаемая сѣкущая плоскость—квадратныя площади.

Теперь мы сдѣлаемъ модель треугольной призмы (рис 42)

2. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 18 сант. $\times$ 15 сант. ($7\frac{1}{4}$ д. $\times$ 6 д.). АВ дѣлается 15 см. (6 д) длиною, а въ D и G дѣлится на три равныя части по 5 см. (2 д.) длиною.

CE и FH дѣлается каждая по 10 см (4 д); онѣ пересѣкаютъ AB перпендикулярно въ точкахъ D и G, въ которыхъ онѣ дѣлятся на двѣ равныя части

Когда это будетъ начерчено, надо провести AE и BH, а затѣмъ продолжить CE и FH такъ, чтобы EI и HJ были бы равны AE и BH. Наконецъ надо провести CF и IJ.



Рис 41. Домъ Шекспира.

3. 1. Сколько граней имѣетъ это тѣло?

2. Сколько реберъ?

3 Сколько вершинъ?

4. Есть ли у него параллельныя грани? Если да, то сколько ихъ?

5. Есть ли параллельныя ребра? Если да, то сколько группъ?

6. Какое самое большое число параллельныхъ реберъ въ какой-нибудь группѣ?

7 Есть ли ребра перпендикулярныя къ другимъ ребрамъ? Если да, то какое самое большое число реберъ, которыя встрѣчаютъ какое-нибудь ребро перпендикулярно?

8. Сколько здѣсь граней, ограниченныхъ четырьмя сторонами? Эти грани всѣ ли равны другъ другу? Какъ бы вы въ этомъ убѣдились?

9. Сколько сторонъ ограничиваютъ каждую изъ остальныхъ граней? Равны ли эти грани между собой? Провѣрьте это.

10. Можете ли вы поставить призму такъ, чтобы шесть реберъ были горизонтальны?

11 Или такъ, чтобы пять реберъ были горизонтальны?

12. Такъ, чтобы три ребра могли быть горизонтальны?

13. Такъ, чтобы два ребра были горизонтальны?

14. Такъ, чтобы два ребра были вертикальны?

15. Такъ, чтобы три ребра были вертикальны?

4. **Разныя призмы.** Это тѣло потому и называется *призма*, т.-е. „нѣчто распиленное“, что, какъ было сказано, она представляетъ часть другого тѣла.

16 Видите ли вы, что призма есть часть куба? Можете ли вы сложить двѣ призмы такъ, чтобы изъ нихъ образовался кубъ?

Кромѣ извѣстной намъ теперь призмы, существуютъ еще другія формы призмъ; но всѣ призмы сходны въ томъ, что имѣютъ двѣ грани параллельныя и равныя другъ другу (эти грани ограничиваются какимъ-нибудь числомъ сторонъ), а всѣ другія грани суть параллелограммы, подразумѣвая подъ параллелограммами не только собственно параллелограммъ, но и квадратъ, и прямоугольникъ, и ромбъ

17. Какого вида или какихъ видовъ параллелограммы въ вашей призмѣ?

18. Параллелограммы могутъ быть или могутъ не быть параллельны другъ другу Каковы они у вашей призмы?

19. Параллелограммы могутъ быть или не быть равны другъ другу. Каковы они у вашей призмы?

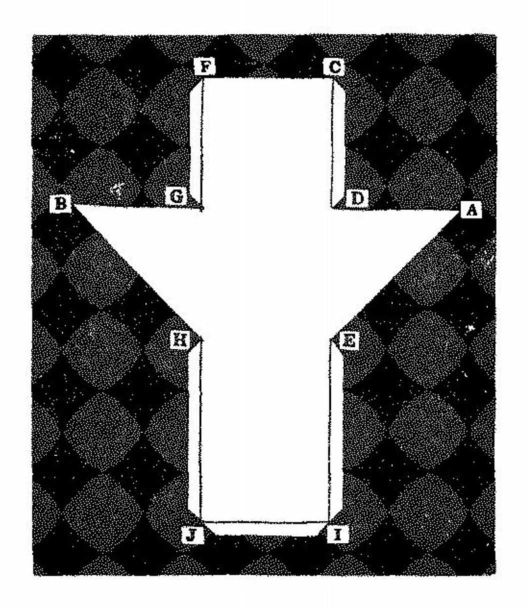


Рис 42

Параллелограммы называются *боковыми* гранями призмы

Двѣ грани, которыя параллельны и равны другъ другу, называются *основаніями* призмы; и призмы принимаютъ разнообразныя названія соотвѣтственно формѣ ихъ основаній—прямоугольныя, квадратныя, треугольныя и т. д.

Прямой призмой называется такая, у которой боковыя грани всѣ квадраты или прямоугольники

20. Какого вида ваша призма?

21. Есть ли параллелепипедъ одинъ изъ видовъ призмъ?

22. Если да, то сколько паръ граней могутъ быть названы его основаніями?

23. Чѣмъ онъ отличается отъ другихъ призмъ?

24. Такъ какъ призмы называются по виду ихъ основаній, то къ какому роду призмъ долженъ принадлежать кубъ?

25. Есть ли кубъ прямая призма?

26. Къ какого вида призмъ принадлежитъ прямоугольный параллелепипедъ?

27. Есть ли онъ прямая призма?

5. **Треугольники.** Разсмотримъ теперь основанія призмы, которую вы только-что сдѣлали. Сколькими сторонами ограничено каждое изъ нихъ?

Часть плоскости, ограниченная тремя прямыми линіями, называется *треугольникомъ*.

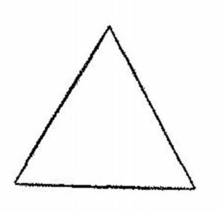


Рис. 43. Равносторонний треугольникъ.

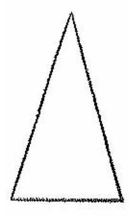
Есть различные виды треугольниковъ; но всѣ они могутъ быть получены разрѣзываніемъ четыреугольниковъ съ угла на уголъ на двѣ части.

Равностороннимъ треугольникомъ называется такой, у котораго всѣ три стороны равны.

Равнобедреннымъ треугольникомъ называется такой, у котораго есть двѣ равныя стороны. Сторона, не равная другимъ, въ этомъ случаѣ называется „основаніемъ".

Разностороннимъ треугольникомъ называется такой, у котораго нѣтъ равныхъ сторонъ.

Косоугольный треугольникъ не имѣетъ ни одной стороны перпендикулярной къ какой-нибудь другой. Онъ можетъ



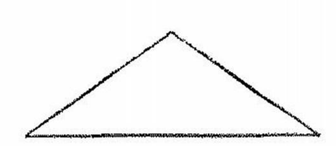


Рис. 44 Разнобедренные треугольники.

быть равносторонній, равнобедренный и разносторонній. Треугольники на рис. 44 могутъ служить примѣрами косоугольныхъ треугольниковъ.

Прямоугольный треугольникъ имѣетъ двѣ стороны вза-

имно перпендикулярныя, иначе сказать — имѣетъ одинъ прямой уголъ.

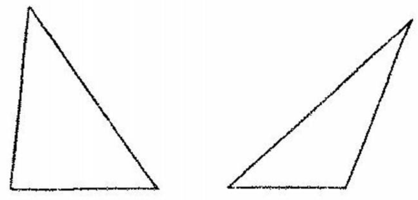
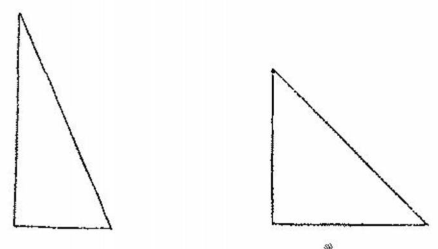


Рис. 45. Разностороннiе треугольники

Прямоугольный треугольникъ также можетъ быть разностороннимъ или равнобедреннымъ. Сторона, которая лежитъ противъ прямого угла, называется *гипотенузой;* двѣ другiя стороны называются *катетами.*



Прямоугольный треугольникъ. Рис. 46. Прямоугольный равнобедренный треугольникъ.

Въ прилагаемомъ сочетанiи треугольниковъ дайте названiе каждому изъ нихъ, сначала опредѣливши формы на-глазъ, а затѣмъ провѣрьте ваши предположенiя измѣренiемъ ихъ сторонъ.

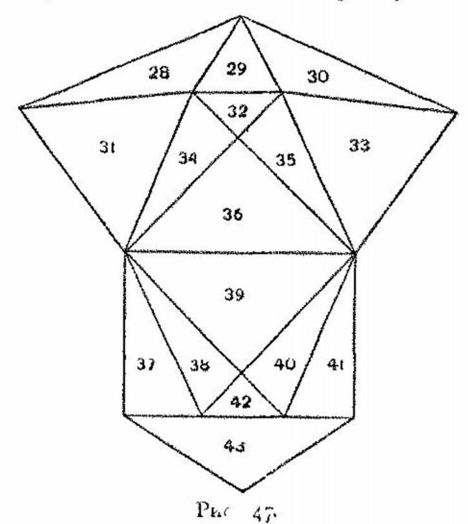


Рис. 47.

ГЛАВА IV.

Углы.

1. Обратите вниманіе на стрѣлку часовъ на рисункѣ башни. Часовая стрѣлка горизонтальна, а минутная вертикальна; слѣдовательно, онѣ стоятъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу.

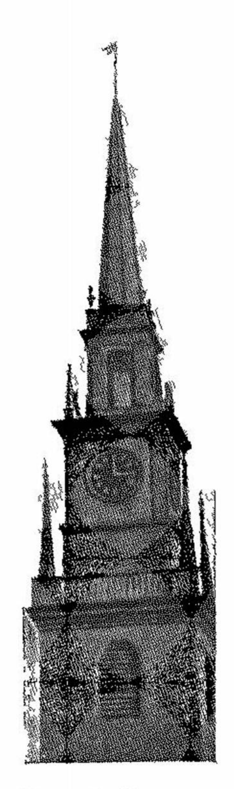


Рис. 48. Колокольня въ Бостонѣ

Такъ какъ стрѣлки часовъ двигаются, то онѣ бываютъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу только два раза въ теченіе часа; но и во всякое другое мгновеніе онѣ образуютъ между собой какой-нибудь уголъ.

Уголъ есть фигура, образуемая двумя линіями, исходящими изъ одной точки.

Эти двѣ линіи называются сторонами или боками угла.

Мѣсто, гдѣ сходятся стороны угла, называется „вершиной" угла.

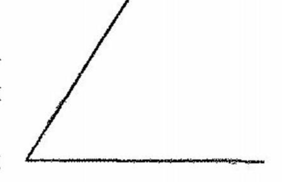


Рис. 49. Уголъ

Вершина есть *точка*. Точка имѣетъ только положеніе, но не имѣетъ ни длины, ни ширины, ни толщины.

Величина угла зависитъ только отъ величины наклона одной стороны къ другой; она не мѣняется отъ удлинненія или укорачиванія сторонъ. Стрѣлки часовъ въ теченіе часа образуютъ другъ съ другомъ безчисленное множество различныхъ угловъ, но въ это время ихъ собственная длина не мѣняется; въ три часа и въ девять часовъ стрѣлки стѣнныхъ часовъ и карманныхъ одинаково перпендикулярны другъ къ другу, то-есть находятся подъ прямымъ угломъ другъ къ другу.

Острый уголъ меньше прямого.
Тупой уголъ больше прямого.

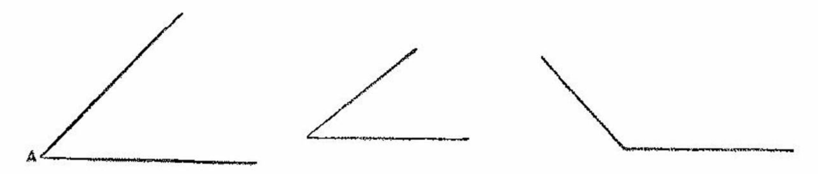


Рис. 50. Вершина угла. Рис. 51. Острый уголъ. Рис. 52. Тупой уголъ

Уголъ можно обозначать одной буквой или цифрой, поставленной около вершины, или тремя буквами или тремя цифрами, размѣщенными—одна около вершины и по одной около каждой стороны угла.

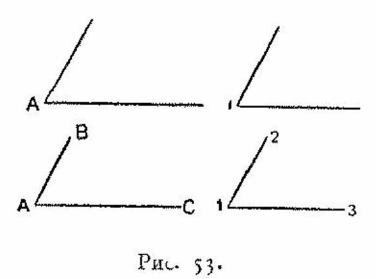


Рис. 53.

Если употребляется три буквы, то одна изъ нихъ, обозначающая вершину, помѣщается между двумя остальными, какъ и у угла, напримѣръ, BAC. Если никакой другой уголъ не имѣетъ той же самой вершины, уголъ точно и ясно обозначается и одной буквой; но если и другіе углы имѣютъ ту же самую вершину, то употребляютъ три буквы, для того чтобы избѣжать путаницы; или можно еще помѣщать одну букву между сторонами каждаго угла.

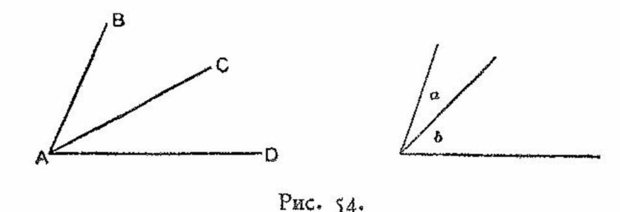


Рис. 54.

2. Таблица дѣленій прямого угла.

Прямой уголъ дѣлится на градусы (⁰), минуты (′), секунды (″) такъ:

1) 1 прямой уголъ = 90 градусамъ (⁰).
2) 1 градусъ (⁰) = 60 минутамъ (′).
3) 1 минута (′) = 60 секундамъ (″).

1. Какъ вы прочитаете уголъ въ $18^0 27' 43''$?

2. $85^0 14' 30''$?

3. $60^0 20' 48''$?

4. Напишите цифрами: десять градусовъ, сорокъ минутъ, двадцать секундъ.

5. Тридцать восемь градусовъ, семнадцать минутъ, шесть секундъ.

6. Сколько градусовъ находится въ двухъ третяхъ прямого угла?

7. Въ трехъ четвертяхъ прямого угла?

8. Сколько минутъ заключается въ 37^0 $30'$?

9. Сколько минутъ заключается въ трехъ восьмыхъ прямого угла?

10. Сколько градусовъ заключается въ трехъ пятыхъ прямого угла?

11. Сколько градусовъ заключается въ пяти шестыхъ прямого угла?

12. Какую часть прямого угла составляютъ 18^0?

13 Какую часть составляютъ 60^0?

14. Какую часть составляютъ 72^0?

15. Какую часть составляютъ 80^0?

16. Какую часть составляютъ 22^0 $30'$?

17. Сколько прямыхъ угловъ заключается въ 120^0.

18. Въ 108^0?

19. Въ 135^0?

20. Въ 126^0?

3. **Транспортиръ**. Транспортиръ—это инструментъ, употребляемый для опредѣленія величины угла или для построенія угла какой-нибудь опредѣленной величины. Транспортиры дѣлаются изъ металла, целлюлоида, картона и т. п. и бываютъ различной величины. Наиболѣе употребительная величина показана на прилагаемыхъ рисункахъ. Намѣченныя на транспортирахъ части могутъ быть болѣе или менѣе мелки; иногда намѣчаютъ дѣленія въ нѣсколько градусовъ, иногда каждый градусъ, иногда отмѣчаютъ секунды и такъ далѣе. Для насъ дѣленія на разстояніи въ 5 градусовъ будутъ достаточно мелки.

Если у васъ нѣтъ транспортира, вы его сами можете сдѣлать изъ картона или изъ плотной бумаги, скопировавши его съ рисунковъ 55 или 56.

На нижнемъ прямомъ краѣ транспортира могутъ быть нанесены дѣленія, чтобы употреблять его какъ мѣрную линейку.

Въ средней точкѣ ребра ВА есть зарубочка или отмѣтка, помѣченная на рисункахъ буквой С; эта точка—вершина того угла, для измѣренія котораго употребляется транспортиръ, и линія СА кла-

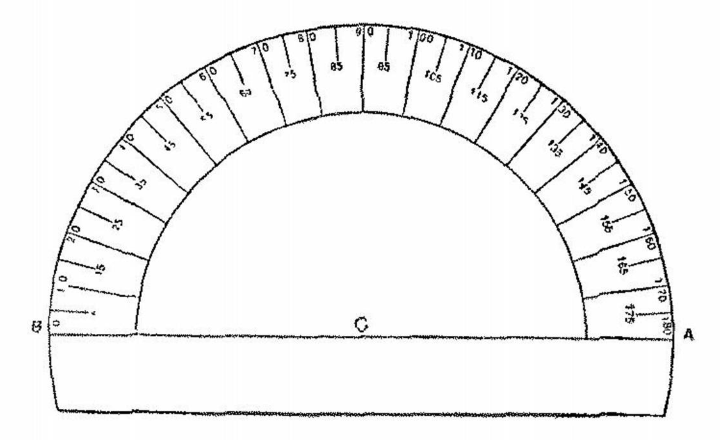


Рис. 55. Транспортиръ.

детея прямо на одну сторону угла. Другая сторона угла указывается маленькими линіями на краю транспортира, имѣющими цифры, ко-

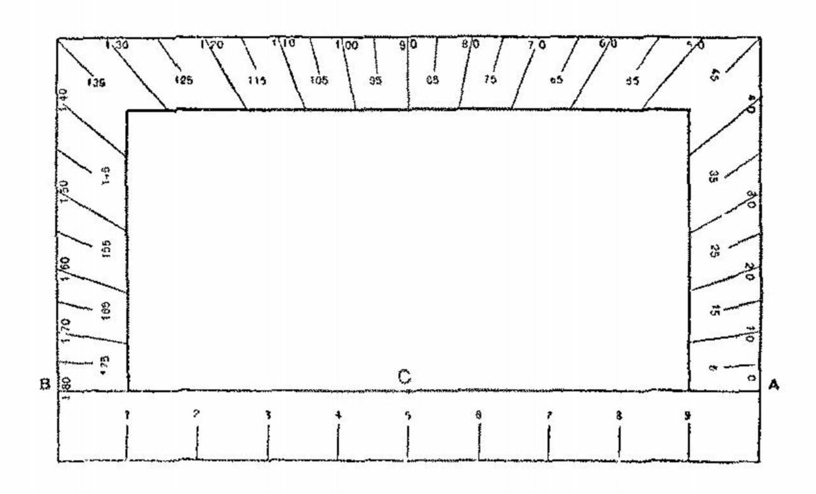


Рис. 56. Транспортиръ.

торыя указываютъ величину угла въ градусахъ. Эта вторая сторона рѣдко вычерчивается цѣликомъ до точки С, потому что для удобства при употребленіи транспортиры должны имѣть внутри себя

нѣкоторое пустое пространство; но вы можете замѣтить, что если продолжить линіи, расположенныя по краю, то всѣ онѣ встрѣтятся въ точкѣ С.

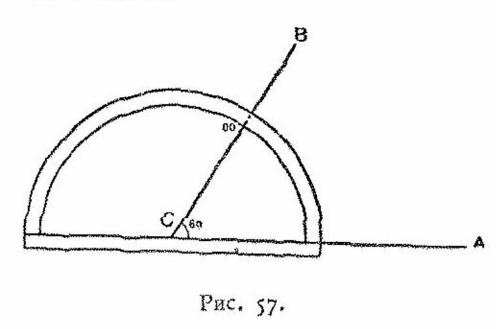


Рис. 57.

На первомъ изображеніи транспортира углы занумерованы слѣва направо, а на второмъ рисункѣ справа налѣво, сообразно съ тѣмъ направленіемъ, въ которомъ, предполагается, возрастаетъ величина угла.

4. Какъ измѣрить уголъ при помощи транспортира. Помѣстите транспортиръ, *какъ* показано на рисункѣ 57, т.-е. чтобы зарубочка пришлась въ вершину угла С, а ребро пошло по

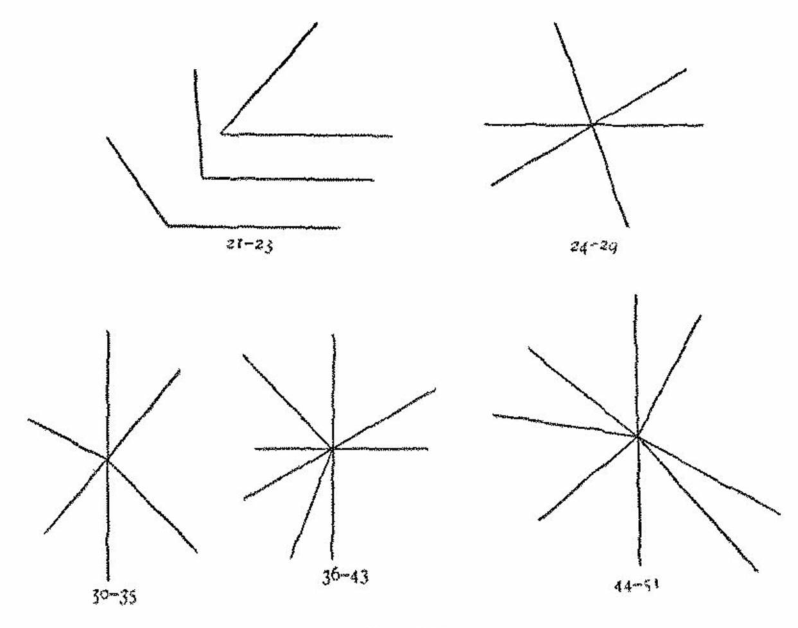


Рис. 58.

сторонѣ СА, такъ, чтобы точка на краю транспортира, которая указываетъ 0°, была бы на СА. Тогда замѣтьте число градусовъ на краю *транспортира* въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ

пересѣкается другой стороной угла CB. Это и будетъ число градусовъ въ измѣряемомъ углу, если транспортиръ размѣченъ на градусы справа налѣво. Если же онъ намѣченъ слѣва направо, то число на краю его надо вычесть изъ 180°, и остатокъ покажетъ число градусовъ въ данномъ углу.

Опредѣлите на глазъ величину угловъ, изображенныхъ на рис. 58 и 59, а потомъ провѣрьте себя при помощи транспортира.

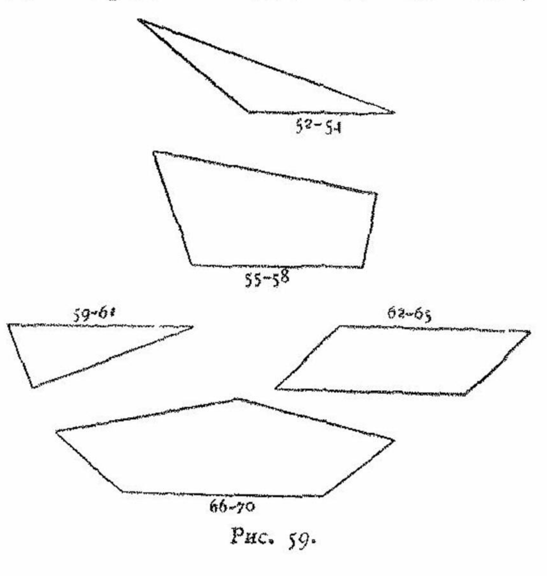


Рис. 59.

5. **Какъ построить уголъ данной величины при помощи транспортира.** Предположимъ, что вы хотите построить уголъ въ 140°. Проведите линію CA, все равно какой длины. Наложите транспортиръ его зарубочкой въ C, а ребромъ вдоль CA. Тогда найдете на краѣ транспортира отмѣтку,

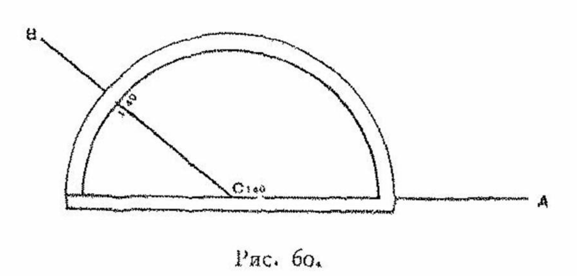


Рис. 60.

которая указываетъ уголъ въ 140°. Поставьте на бумагѣ точку въ этомъ мѣстѣ, отнимите транспортиръ и черезъ отмѣтку проведите линію CB. ACB и будетъ такой уголъ, какой вамъ надо было начертить.

Постройте при помощи транспортира слѣдующіе углы:

71. 60°.	75. 155°.	78. 85°.
72. 160°.	76. 170°.	79. 105°.
73. 45°.	77. 25°.	80. 5°.
74. 80°.		

Постройте при помощи транспортира углы, равные слѣдующимъ:

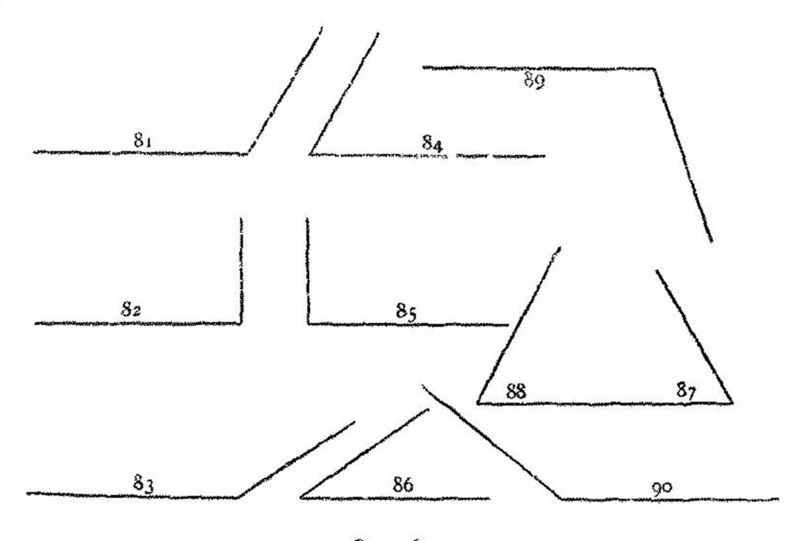


Рис. 61.

Постройте слѣдующіе углы, проводя линіи по линейкѣ, но опредѣляя величину только на глазъ; а потомъ провѣрьте ваши углы транспортиромъ.

91. 30°.	95. 90°.	98. 20°.
92. 120°.	96. 50°.	99. 100°.
93. 45°.	97. 130°	100. 85°.
94. 135°.		

101. Постройте углы въ 40° и 140° чтобы у нихъ была одна и та же вершина и одна сторона общая. А въ 130° и 50°. А въ 90° и 90°.
102. Постройте углы въ 60°, 90°, 120, 90°, чтобы ихъ вершины были въ одной и той же точкѣ. А въ 45°, 135°, 80°, 100°.

ГЛАВА V.

Построеніе нѣкоторыхъ плоскихъ фигуръ.

1. Построить треугольникъ, когда извѣстна длина одной стороны и величина угловъ у концовъ этой величины.

Предположимъ, что сторона имѣетъ 3 сантиметра въ длину и углы при концахъ ея пусть будутъ въ 70° и 50°.

Начертите линію АВ въ 3 см. длиною.

Отъ точки А проведите линію, образующую съ АВ уголъ въ 70°, и отъ точки В проведите линію, образующую съ АВ уголъ въ 50°. Эти двѣ линіи встрѣтятся въ точкѣ С.

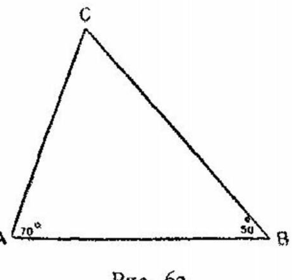


Рис. 62.

АСВ и будетъ такой треугольникъ, какой надо было начертить.

Постройте треугольники, имѣющіе слѣдующіе стороны и углы:

1. Сторона	5	сантим.	углы	60° и 60°.	6. Сторона	2	дюйм.	углы	60° и 60°.
2. „	5	„	„	90° и 45°.	7. „	3	„	„	30° и 45°.
3. „	3	„	„	70° и 70°.	8. „	2	„	„	45° и 45°.
4 „	4	„	„	100° и 30°.	9. „	2	„	„	90° и 45°.
5 „	3	„	„	100° и 50°.	10. „	2	„	„	70° и 50°.

2. Треугольникъ, у котораго два угла имѣютъ каждый по 60°, мы разсмотримъ особо. Если вы смѣряете третій уголъ такого треугольника, то вы найдете, что онъ тоже равенъ 60°; и если вы смѣряете двѣ стороны этого угла, то вы найдете, что каждая изъ нихъ имѣетъ ту же самую длину, что и третья сторона. Этотъ треугольникъ, слѣдовательно, и равноугольный и равносторонній.

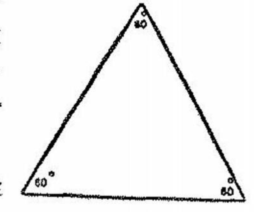


Рис. 63.

Если вы хотите построить равноугольный треугольникъ со стороною хотя бы въ 5 см. длиною, вы можете начертить линію въ 5 см. длиною и у каждаго конца ея построить по углу въ 60° и продолжить линіи до ихъ взаимной встрѣчи.

3. **Сумма угловъ всякаго треугольника равна 180° или двумъ прямымъ угламъ.** Вы можете убѣдиться въ этомъ опытомъ.

Начертите треугольникъ ABC, все равно какой формы и величины, и опустите перпендикуляръ AP на одну изъ болѣе длинныхъ сторонъ BC, образуя такимъ образомъ два прямыхъ угла APB и APC. Вырѣжьте треугольникъ изъ бумаги и пригните всѣ три вершины въ точку P. Вы увидите, что три угла треугольника вполнѣ точно покроютъ два прямыхъ угла.

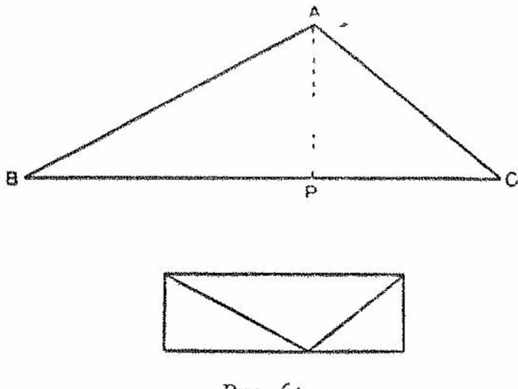


Рис. 64.

Слѣдовательно, если вы знаете величину двухъ угловъ треугольника, вы можете найти третій уголъ, вычитая ихъ сумму изъ 180°.

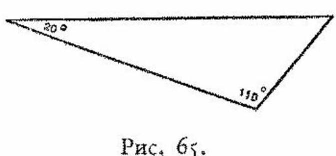


Рис. 65.

Такимъ образомъ, если два угла треугольника имѣютъ 20° и 110°, то ихъ сумма будетъ 130°; вычитая эту сумму изъ 180°, получаемъ для третьяго угла 50°.

Найдите число градусовъ для третьяго угла для слѣдующихъ треугольниковъ:

11. $A = 20^0$, $B = 40^0$	16 $A + B = 100^0$
12. $A = 80^0$, $B = 60^0$	17 $A + B = 140^0$
13. $A = 30^0$, $B = 130^0$	18. $A + B = 10^0$
14. $A = 45^0$, $B = 90^0$	19. $A + B = 95^0$
15. $A = 70^0$, $B = 70^0$	20. $A + B = 175^0$

4. Кромѣ равносторонняго треугольника, есть еще два другихъ, которые требуютъ особаго разсмотрѣнія, — треугольникъ равнобедренный и прямоугольный.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ есть всегда два равныхъ угла, которые лежатъ противъ равныхъ сторонъ, при концахъ основанія. Третій уголъ называется *угломъ при вершинѣ*.

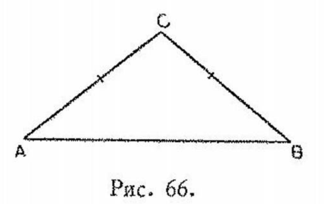


Рис. 66.

Такимъ образомъ въ треугольникѣ ABC, въ которомъ CA равна CB, углы A и B равны другъ другу, а C есть уголъ при вершинѣ.

И также, если вы знаете, что два угла треугольника равны, то вы можете заключить, что и двѣ стороны его также равны и что, слѣдовательно, треугольникъ этотъ равнобедренный.

Такимъ образомъ, если извѣстно, что въ треугольникѣ BEF углы D и E равны, то стороны FD и FE также равны.

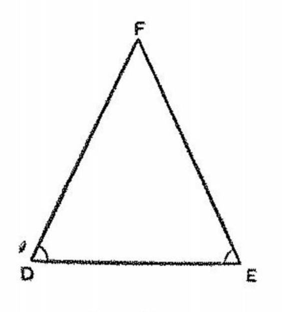


Рис. 67.

Слѣдовательно, если вамъ сказали величину одного угла равнобедреннаго треугольника, то для того, чтобы найти два другіе угла, вамъ нужно только знать, есть ли это уголъ при вершинѣ или одинъ изъ равныхъ угловъ.

Предположимъ, напримѣръ, что уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника имѣетъ 40^0. Вычитая 40^0 изъ 180^0, вы получите 140^0, приходящіеся на другіе два угла; а такъ какъ эти углы равны, то каждый изъ нихъ долженъ имѣть по 70^0.

Если одинъ изъ равныхъ угловъ равнобедреннаго треугольника равенъ 40^0, другой

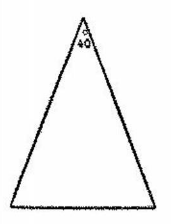


Рис. 68.

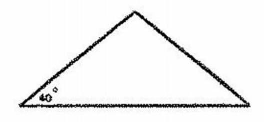


Рис. 69.

уголъ есть также 40°; вмѣстѣ эти два угла составятъ 80°, которые для угла при вершинѣ оставятъ 100°.

Найдите величину каждаго угла слѣдующихъ треугольниковъ, если извѣстно, что треугольники эти равнобедренные и что данный уголъ есть уголъ при вершинѣ:

21. 20°.	23. 150°.	25. 70°.	27. 90°.	29. 85°.
22. 40°.	24. 80°.	26. 45°.	28. 140°.	30. 15°.

Найдите величину каждаго угла слѣдующихъ треугольниковъ, если извѣстно, что треугольники эти равнобедренные и что данный уголъ есть одинъ изъ равныхъ угловъ:

31. 30°.	35. 15°.	38. 75°.
32. 70°.	36. 50°.	39. 10°.
33. 25°.	37. 35°.	40. 85°.
34. 80°.		

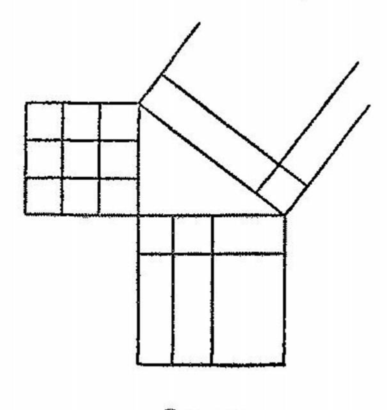


Рис. 70.

5. **Прямоугольный треугольникъ** имѣетъ одно важное свойство, которое мы сейчасъ разсмотримъ.

41. Начертите прямой уголъ со сторонами въ 3 см. и 4 см. (3/4 д. и 1 д.) длиною и постройте прямоугольный треугольникъ, проведя гипотенузу.

42. На каждой сторонѣ треугольника начертите квадратъ.

43. Раздѣлите каждый квадратъ на маленькіе квадратики со стороною въ 1 см. (или 1/4 д.) и сосчитайте эти квадратики.

44. Сравните число квадратиковъ, образованныхъ на гипотенузѣ съ суммой квадратиковъ на катетахъ?

45. Продѣлайте то же самое съ другимъ треугольникомъ, взявши стороны прямого угла въ 5 см. и 12 см. (или 1 1/4 д. и 3 д.).

Соотношеніе между площадью квадрата на гипотенузѣ и суммой площадей квадратовъ на катетахъ во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ то же самое, какъ въ тѣхъ двухъ треугольникахъ, которые мы только-что чертили, и соотношеніе это выражается слѣдующимъ образомъ: „квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ“.

Слѣдовательно для того, чтобы построить квадратъ, площадь котораго была бы равна суммѣ площадей двухъ другихъ квадратовъ, вамъ нужно только начертить прямоугольный треугольникъ съ катетами, равными сторонамъ данныхъ квадратовъ, а потомъ начертить квадратъ на гипотенузѣ; это и будетъ требуемый квадратъ.

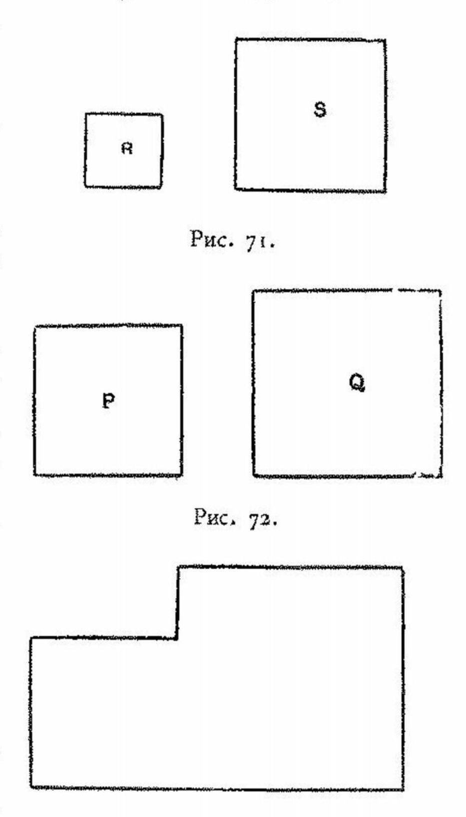


Рис. 71.

Рис. 72.

Рис. 73.

46. Постройте квадратъ, площадь котораго была бы равна суммѣ площадей квадратовъ R и S.

47. Постройте квадратъ, площадь котораго была бы равна суммѣ площадей квадратовъ P и Q.

48. Прилагаемая фигура на рис. 73 состоитъ изъ двухъ квадратовъ. Скопируйте фигуру на бумагу, но при этомъ начертите каждую линію вдвое длиннѣе, чѣмъ на рисункѣ. Потомъ проведите линію между двумя какими-то вершинами такъ, чтобы эта линія была стороною квадрата, имѣющаго ту же самую площадь, какъ и вашъ чертежъ.

49. Постройте квадратъ, площадь котораго была бы вдвое больше, чѣмъ квадратъ T.

50. Одинъ человѣкъ имѣлъ два участка земли, оба квадратные; одинъ участокъ имѣлъ по сторонѣ 12 саженъ, а другой—16 саженъ. Эти участки онъ промѣнялъ на одинъ, тоже квадратный и той же площади, какъ прежніе два. Какой длины была изгородь, которой онъ окружилъ свою новую землю?

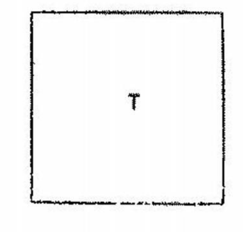


Рис. 74.

6. Начертите прямую черезъ данную точку и параллельно данной прямой.

(a) При помощи линейки и наугольника. Предположимъ, что вы хотите провести черезъ точку P линію параллельно AB.

Положите линейку и наугольникъ такъ, чтобы край линейки былъ близко отъ Р, и чтобы одинъ катетъ треугольника совпадалъ съ линiей АВ, а другой прилегалъ бы къ линейкѣ. Двигайте наугольникъ вдоль линейки до тѣхъ поръ, пока онъ коснется точки Р. По его краю проведите линiю РХ, которая будетъ требуемой линiей, параллельной АВ.



Рис. 75. Употребленiе линейки и наугольника.

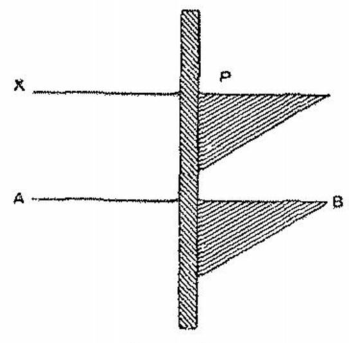


Рис. 76.

(b). При помощи „параллельной линейки".

Этотъ *инструментъ (рис 78) состоитъ изъ двухъ линеекъ*, связанныхъ вмѣстѣ двумя металлическими полосками, вращающимися на штифтикахъ, вдѣланныхъ въ ихъ концы Разстоянiе между штифти-



Рис. 77. Употребленiе параллельной линейки.

ками на обѣихъ металлическихъ полоскахъ равныя; и разстоянія между штифтиками, вдоль линеекъ, также равныя. Такимъ образомъ штифтики—это вершины параллелограмма, будетъ ли линейка раздвинута или сложена. Всѣ четыре края линеекъ остаются параллельными между собою, такъ что параллельныя линіи можно чертить по каждому изъ нихъ.

Чтобы начертить прямую линію черезъ P, параллельно AB, приложите одинъ край линейки къ AB и крѣпко придерживайте эту половину инструмента на своемъ мѣстѣ. Двигайте другую половину на штифтикахъ до тѣхъ поръ, пока ея край коснется точки P; тогда вдоль этого края проведите черезъ P линію XY, и она будетъ параллельна AB.

7. Постройте параллелограммъ, если вамъ извѣстна длина его двухъ встрѣчающихся сторонъ и величина угла между ними.

Пусть стороны будутъ 4 сантиметра и 3 сантиметра и уголъ 60^0.

Проведите линію AB длиною 4 сантиметра.

Отъ A проведите AC длиною 3 см. и такъ, чтобы она образовала съ AB уголъ въ 60^0.

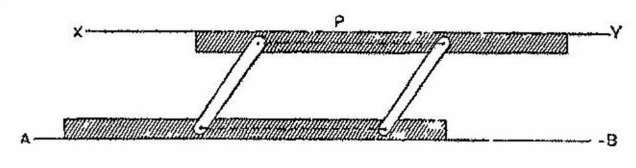


Рис. 78.

Продолжите нѣсколько AB за B, скажемъ до точки X

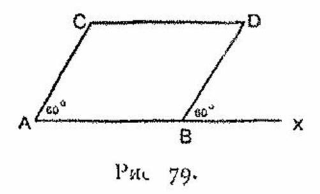


Рис 79.

Проведите BD такой же самой длины, какъ и AC, и такъ, чтобы уголъ XBD былъ той же величины, какъ и уголъ A.

Проведите прямую CD.

Тогда ABCD будетъ требуемый параллелограммъ.

BD можетъ быть также начерчена при помощи наугольника или параллельной линейки.

Постройте параллелограммы, имѣющіе слѣдующіе стороны и углы, и потомъ скажите, какого рода каждый изъ нихъ:

51.	Стороны	5	сангметровъ	и 2	сантиметровъ;	уголъ	45°.
52.		Ђ	,	„ 5	,	„	60°.
53.	„	4	„	„ 3	„	„	90°.
54.	,	3	„	„ 3	„	„	90°.
55.	„	2	дюйма	„ 3	дюйма	„	50°.
56.	„	2	„	„ 2	„	,	120°
57.	„	2	„	„ 2	„	„	90°
58.	„	2	„	„ 1	„	„	90°

Сумма трехъ угловъ всякаго треугольника равняется двумъ прямымъ угламъ или 180°.

Квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

ГЛАВА VI

Скошенная призма.

Обратите вниманіе на подпорки у церкви, изображенной на рисункѣ 80 Онѣ не такія призмы, какія мы только-что изу-

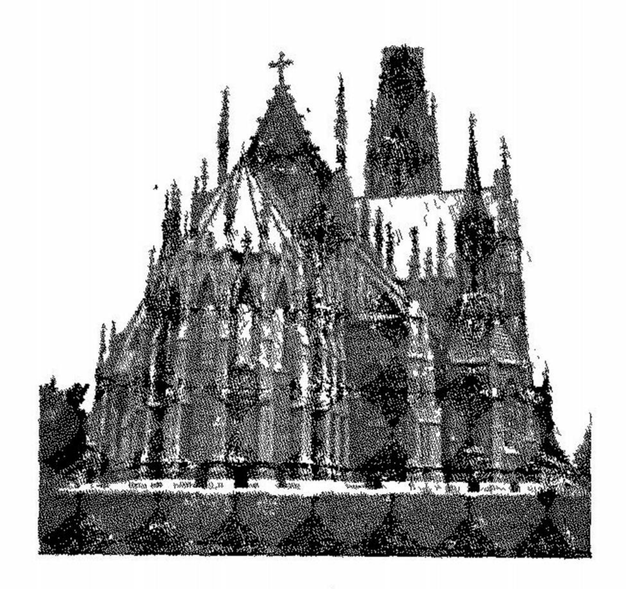


Рис 80.

чали, потому что ихъ верхняя грань наклонна къ ихъ основанію; онѣ то, что называется, *скошенной* или *срѣзанной*

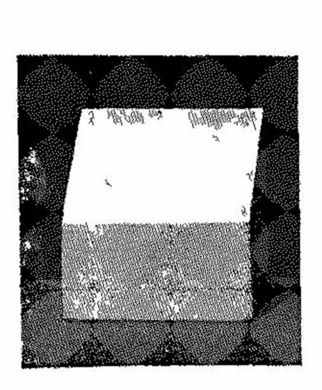


Рис. 81.

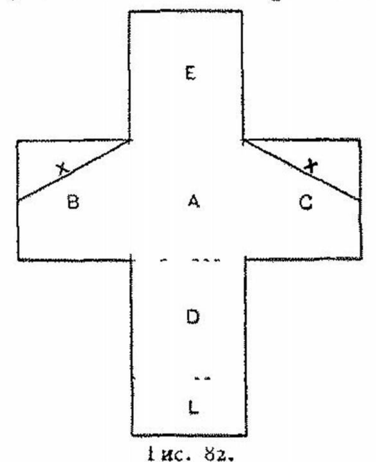


Рис. 82.

призмой. Скошенная призма такая призма, у которой часть срѣзана плоскостью, наклонной къ основанію.

Мы теперь сдѣлаемъ модель скошенной квадратной призмы или куба.

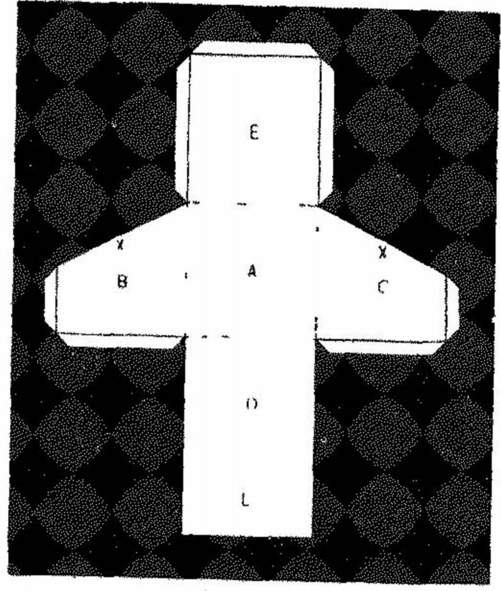


Рис. 83.

Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 19 см. $\times$ 17 см. (или $7^1/_2$ д. $\times$ $6^1/_2$ д.).

Построеніе можно видѣть на чертежѣ 82 и 83.

А, В, С и D квадраты, стороны которыхъ по 5 см. (или 2 д.).

L—прямоугольникъ, у котораго короткія стороны имѣють по 2 сантиметра 5 миллиметровъ (или 1 д.)

Отъ двухъ угловъ квадрата А проводятся линіи X къ среднимъ точкамъ внѣшнихъ сторонъ, лежащимъ по бокамъ квадратовъ.

E—прямоугольникъ съ длинными сторонами, равными X

Основанiе скошенной призмы—это основанiе той призмы, часть которой она составляетъ.

Грань, образованная сѣкущей плоскостью, называется *наклоннымъ сѣченiемъ.*

Другiя грани называются *боковыми гранями* или сторонами призмы.

1. Какого вида боковыя грани призмы на рисункѣ 81?

2. Если вы положите тѣло на одну изъ боковыхъ граней, какъ на основанiе, то какъ тогда будетъ называться это тѣло?

3. Почему это происходитъ, что это тѣло имѣетъ различныя названiя въ зависимости отъ своего положенiя?

4. Предполагая, что первоначальное тѣло было кубъ, можете ли вы сообразить, какой формы должна быть отрѣзанная часть?

5. Можете ли вы сложить двѣ одинаковыя скошенныя призмы вмѣстѣ такъ, чтобы онѣ образовали прямоугольный параллелепипедъ?

Какой бы былъ объемъ такого параллелепипеда?

7. Какой же, значитъ, объемъ вашей скошенной призмы?

ГЛАВА VII.

Пирамида.

1. На рисункѣ 84 вы видите очень древнюю геометриче-

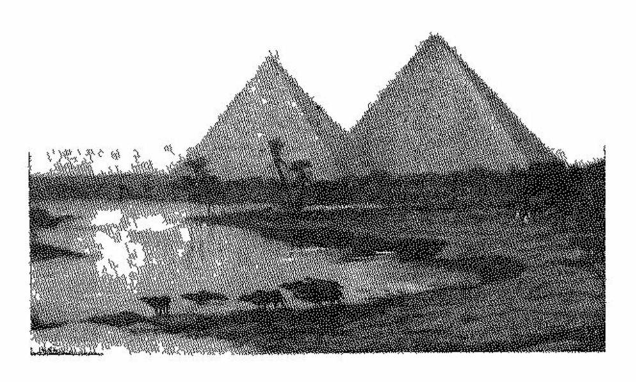


Рис. 84. Египетскiя пирамиды.

скую форму, которая, какъ предполагаютъ, была изобрѣтена египтянами. Это *пирамида*

У пирамиды всѣ стороны, за исключеніемъ одной, треугольники, которые встрѣчаются въ одной точкѣ, называемой *вершиной*. Особая грань, которая можетъ имѣть раз-

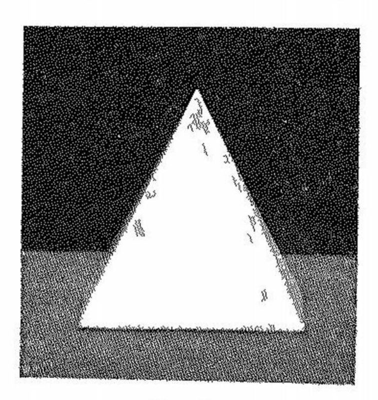


Рис. 85.

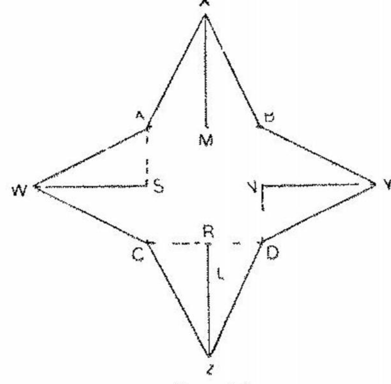


Рис. 86.

личное число сторонъ, называется основаніемъ; и пирамида получаетъ названіе квадратной, треугольной и т. д. въ зависимости отъ формы своего основанія.

Сдѣлаемъ теперь модель пирамиды, имѣющей своимъ основаніемъ квадратъ.

2. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 16 см. 5 мм $\times$ 16 см. 5 мм (или $6^1/_2$ д $\times$ $6^1/_2$ д).

Построеніе можно видѣть на чертежѣ 85,86 и 87

Прежде всего начертите квадратъ со стороною въ 5 см. (2 д.) и найдите среднія точки его сторонъ M, N, R, S.

Потомъ снаружи начертите перпендикулярныя къ ребрамъ линіи BX. NY, RZ и SW, каждая по 5 см. 6 мм. (или $2^1/_4$ д.) длиною.

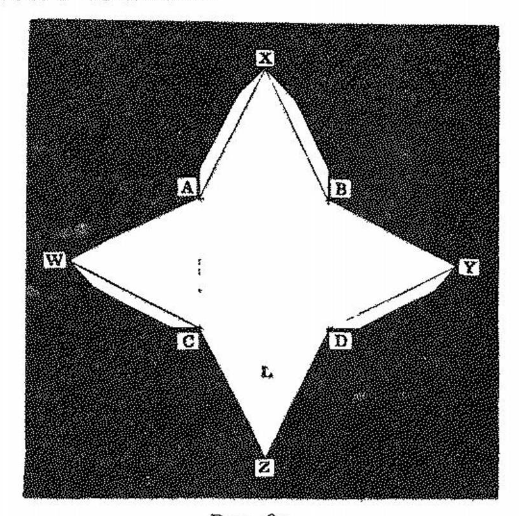


Рис. 87.

Наконецъ проведите XA, XB, YB и т. д. къ вершинамъ квадрата

3. 1. Сколько граней имѣетъ эта пирамида?

2. Сколько реберъ?

3. Сколько вершинъ?

4. Сколько угловъ имѣютъ всѣ грани вмѣстѣ?

5. Сколько реберъ перпендикулярныхъ къ другимъ ребрамъ?

6. Сколько самое большое число реберъ перпендикулярныхъ къ какому-нибудь одному ребру?

4. **Двугранные углы.** Вы видѣли, какъ стороны граней могутъ образовывать углы съ другими сторонами. Теперь обратите вниманіе на то, что и сами грани могутъ образовывать углы съ другими гранями, и въ дѣйствительности всегда образуютъ, если они достаточно продолжены и, конечно, если онѣ не параллельны. Но замѣтьте, что вмѣсто того, чтобы пересѣкаться въ точкѣ, какъ это дѣлаютъ двѣ стороны, двѣ грани пересѣкаются по прямой линіи. Уголъ, образованный двумя гранями, называется *двуграннымъ угломъ*.

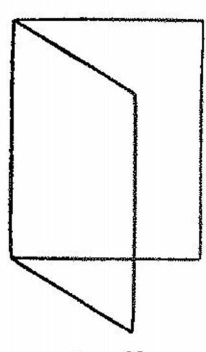


Рис. 88

Двугранные углы, какъ и линейные, могутъ быть острыми, прямыми или тупыми.

7. Сколько двугранныхъ угловъ образуетъ основаніе квадратной пирамиды съ другими гранями?

8. Какими вамъ кажутся эти углы: острыми, прямыми или тупыми?

9. Сколько двугранныхъ угловъ образуютъ между собою треугольныя грани?

10. Какого рода кажутся вамъ эти углы?

Рис. 89. Измѣреніе двуграннаго угла.

Двугранные углы можно измѣрить при помощи прямоугольнаго куска картона въ 5 или 6 дюймовъ длиною и 2 дюйма шириною, сложеннаго такъ, чтобы короткія стороны пришлись точно другъ на друга.

Картонъ прикладываютъ сложеннымъ ребромъ къ ребру измѣряемаго угла, а поло-

винки картона ложатся плотно по гранямъ угла. Потомъ транспортиръ прикладывается своей зарубочкой къ одному изъ концовъ сложеннаго ребра, и измѣряется уголъ между двумя расходящимися сторонами картона: этотъ уголъ равняется двугранному углу.

5. **Площадь треугольника.** Поверхность вашей пирамиды состоитъ изъ квадратнаго основанія и четырехъ треугольниковъ. Вы уже знаете, какъ найти площадь основанія; и мы теперь можемъ обратить вниманіе на другія грани.

Эти грани треугольники. Площадь треугольника равна одной изъ его сторонъ, умноженной на половину перпендикулярнаго разстоянія отъ этой стороны до противоположной вершины.

Мы сначала высчитаемъ площадь одного изъ треугольниковъ діаграммы, которую вы употребляли для построенія пирамиды, а потомъ провѣримъ отвѣтъ измѣреніемъ.

Рис. 90.

Въ треугольникѣ АХВ какой длины линія АВ?

Какой длины линія ХМ?

Сколько составитъ половина ХМ?

Умножая половину ХМ на АВ, что мы получимъ для площади треугольника?

Теперь проверимъ это измѣреніемъ.

Постройте на бумагѣ треугольникъ какъ разъ такой величины, какъ одна изъ граней

Проведите АВ 5 см. (2 д.) и найдите среднюю точку М

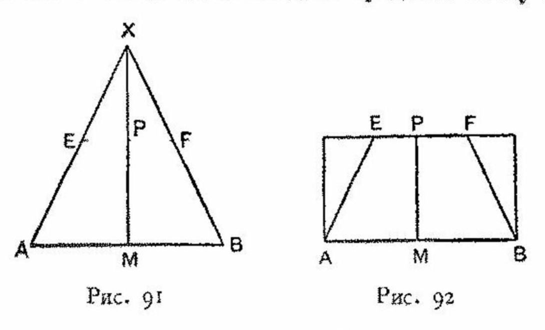


Рис. 91 Рис. 92

Изъ М проведите перпендикуляръ МХ, 5 см. 6 мм. ($2^1/_4$ д.) длиною, и потомъ проведите ХА и ХВ

Вырѣжьте осторожно треугольникъ изъ бумаги.

Загните верхнюю часть такъ, чтобы точка X упала какъ разъ въ M, и проведите складку EPF. Отрѣжьте часть EPF по складкѣ и разрѣжьте ее на двѣ части по линіи XP. Потомъ приложите эти два кусочка къ остатку треугольника, какъ показано на рисункѣ.

Вы теперь превратили треугольникъ въ прямоугольникъ, который вы можете склеить полосками бумаги съ задней стороны.

11. Какая длина этого прямоугольника?

12. Какая ширина?

13. Какая площадь?

14. Согласенъ ли этотъ результатъ съ отвѣтомъ, который вы получили вычисленіемъ по діаграммѣ? Если нѣтъ, то поищите, гдѣ вы сдѣлали ошибку. Площадь равняется 14 кв. см. или $2^1/_4$ кв. дюймамъ.

15. Какая площадь всѣхъ четырехъ треугольниковъ вмѣстѣ?

16. Какая площадь всей поверхности нашей пирамиды?

6. **Объемъ пирамиды.** Объемъ пирамиды равенъ одной трети высоты, умноженной на площадь ея основанія.

Мы въ этомъ сейчасъ убѣдимся, сдѣлавши опытъ съ пирамидой и кубомъ.



Рис. 93. Опредѣленіе высоты пирамиды.

Прежде всего, приложите основаніе пирамиды къ основанію куба и посмотрите, одна ли и та же у нихъ площадь. Потомъ поставьте оба тѣла на горизонтальную плоскость близко другъ отъ друга и положите линейку на крышку куба и на вершину пирамиды. Посмотрите, горизонтальна ли линейка; вы увидите, что она почти совершенно горизонтальна, если обѣ модели были сдѣланы вами какъ слѣдуетъ. Такъ что высота куба и пирамиды равны такъ же, какъ и основанія. Теперь объемъ куба равенъ площади его основанія, умноженнаго на цѣлую высоту; такъ что если объемъ пирамиды равенъ площади, умноженной на $1/3$ высоты, то значитъ пирамида должна быть втрое меньше, чѣмъ кубъ.

Сдѣлайте новую пирамиду той же величины, сохранивши первую, но раньше, чѣмъ заклеивать послѣднее ребро, отрѣжьте квадратное основаніе. Потомъ возьмите кубъ, который служилъ вамъ для измѣренія, и, употребляя песокъ или воду, какъ вы дѣлали это раньше,

посмотрите, наполнится ли пирамида три раза тѣмъ количествомъ песка, которое наполняетъ кубъ.

17. Сколько, слѣдовательно, кубическихъ сантиметровъ заключается въ объемѣ вашей пирамиды?

18. Сколько насыпокъ пирамиды нужно для того, чтобы наполнить параллелепипедъ, описанный на стр. 37?

19. Если бы сторона основанія вашей пирамиды была вдвое длиннѣе, чѣмъ есть, а высота та же самая, то какой бы былъ объемъ пирамиды?

20. Если бы основаніе было бы то же самое, какое оно есть, но высота увеличилась бы вдвое, то какой бы былъ объемъ ея?

21 Какой будетъ объемъ пирамиды съ высотою въ 6 дюймовъ, если основаніе содержитъ 9 кв. дюймовъ?

22. Если пирамида и кубъ имѣютъ равныя основанія по 16 кв. дюйм, какая должна быть высота пирамиды, чтобы объемы обоихъ тѣлъ были равны?

23. Сколько пирамидъ, каждая съ высотою въ 3 сантиметра и площадью основанія въ 16 кв. сантиметровъ, наполнится содержимымъ прямоугольнаго параллелепипеда 4 сантимет. $\times$ 6 сантиметровъ $\times$ 8 сантиметровъ?

Площадь треугольника равняется половинѣ произведенія его основанія на высоту.

$$\textit{Площадь треугольника} = \frac{\textit{основаніе} \times \textit{высота}}{2} = \frac{\textit{основаніе}}{2} \times \textit{высота} = \textit{основаніе} \times \frac{\textit{высота}}{2}.$$

Объемъ пирамиды равняется трети произведенія площади основанія на высоту.

$$\textit{Объемъ пирамиды} = \frac{\textit{основаніе} \times \textit{высота}}{3} = \frac{\textit{основаніе}}{3} \times \textit{высота} = \textit{основаніе} \times \frac{\textit{высота}}{3}.$$

ГЛАВА VIII.

Треугольная пирамида.

1. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 10 см. $\times$ 11 см. (или 4 д. $\times$ $4\frac{1}{2}$ д) ABC есть равносторонній треугольникъ, каждая сторона котораго по 10 сантиметровъ длиною. Среднія точки реберъ D, E и F соединяются прямыми линіями и такимъ образомъ тре-

угольникъ дѣлится на четыре равныхъ маленькихъ равносторонних треугольника, имѣющихъ стороны по 5 сантиметровъ длиною.

На англійскія мѣры стороны треугольника ABC могутъ быть по 4 дюйма, а маленькіе треугольники будутъ имѣть стороны по 2 дюйма.

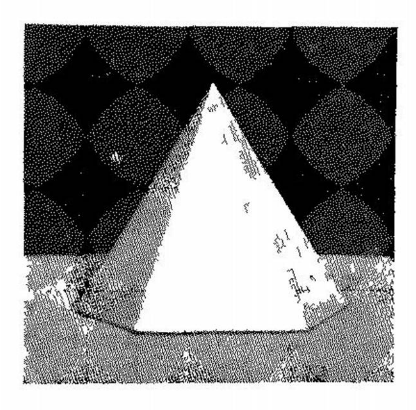


Рис. 94.

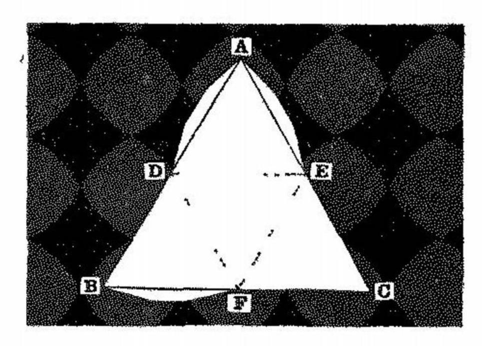


Рис. 95.

2 1. Сколько граней имѣетъ это тѣло? Какая ихъ форма?

2. Сколько реберъ? Какая ихъ длина?

3. Сколько вершинъ?

4. Сколько линейныхъ угловъ? И какой величины?

5. Сколько двугранныхъ угловъ и какой величины?

6 Это тѣло называется пирамидой: почему?

7. Оно также называется треугольной пирамидой: почему?

8. Сколько граней у треугольной пирамиды могутъ быть названы ея основаніемъ?

9. Сколько граней у четыреугольной пирамиды могутъ быть названы основаніемъ?

10. Можете ли вы объяснить различіе въ этомъ отношеніи между той и другой пирамидой?

3. **Тѣлесный уголъ.** Вы видѣли, что когда встрѣчаются два ребра или встрѣтятся при ихъ продолженіи, они образуютъ линейный уголъ; и если встрѣчаются или встрѣтятся при ихъ распространеніи двѣ грани, онѣ образуютъ двугранный уголъ. Теперь, если три или больше граней встрѣчаются въ одной точкѣ и заключаютъ, ограничиваютъ все пространство около этой точки между этими гранями, то они образуютъ то, что называется *тѣлеснымъ угломъ*.

Если вы будете внимательно рассматривать тѣла, вы увидите, что необходимо самое меньшее три грани, чтобы образовать одинъ тѣлесный уголъ; при двухъ граняхъ пространство останется открытымъ. Но вы можете брать граней сколько угодно больше трехъ. Однако, если вы попробуете сдѣлать тѣлесный уголъ, соединяя куски бумаги, вы найдете, что сумма всѣхъ угловъ, образованныхъ ребрами, должна быть меньше, чѣмъ 360⁰ или 4 прямыхъ угла. Если сумма будетъ равна 360⁰, куски бумаги лягутъ ровно и образуютъ плоскость.

Замѣтьте, что тѣлесный уголъ имѣетъ открытое пространство противъ вершины. Если это пространство будетъ ограничено плоскостью, пересѣкающей другія грани, то полученное тѣло будетъ пирамида.

Если тѣлесный уголъ образованъ тремя гранями, онъ называется *трехграннымъ* угломъ.

Если онъ образованъ четырьмя или болѣе гранями, онъ называется *многограннымъ.*

11. Какая разница между трехграннымъ угломъ и треугольной пирамидой?

12 Сколько тѣлесныхъ угловъ имѣетъ треугольная пирамида?

13. Сколько ихъ имѣетъ кубъ? Чему равна сумма линейныхъ угловъ, которые образуютъ каждый тѣлесный уголъ куба?

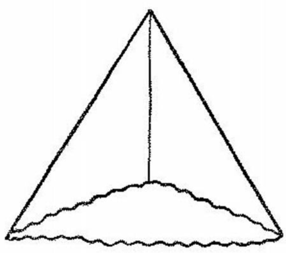


Рис. 96. Тѣлесный уголъ

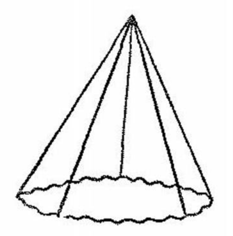


Рис. 97 Многогранный тѣлесный уголъ.

14. Сколько тѣлесныхъ угловъ имѣетъ четыреугольная пирамида?

15. Есть ли тѣлесный уголъ въ каждой вершинѣ тѣла, которое цѣликомъ окружено гранями?

16. Въ треугольной пирамидѣ число тѣлесныхъ угловъ равно ли числу граней?

17. А въ кубѣ?

18. А въ призмѣ?

19 А въ четыреугольной пирамидѣ?

ГЛАВА IX.

Пятиугольная пирамида.

1. Для діаграммы нужна бумага 15 сантиметровъ $\times$ 15 сантиметровъ (6 д. $\times$ 6 д.).

Проведите AB длиною 3 сантиметра.

Изъ A проведите AE 3 сантиметра длиною и подъ угломъ въ 108° къ AB.

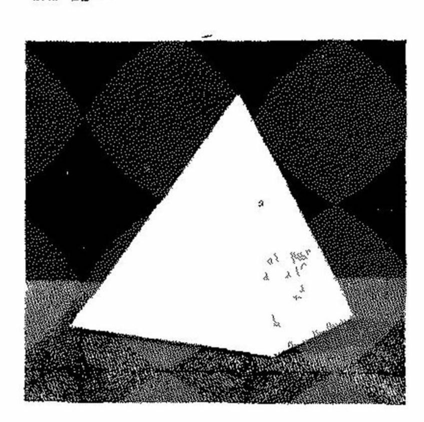


Рис. 98.

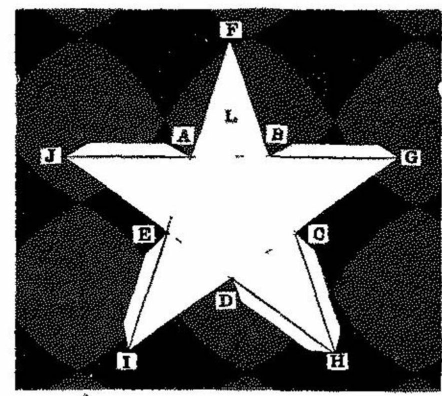


Рис. 99.

Изъ B проведите BC 3 сантиметра длиною и подъ угломъ въ 108° къ AB.

Изъ E проведите ED 3 сантиметра длиною и подъ угломъ въ 108° къ AE.

Проведите линію DC, и внутренняя часть пирамиды будетъ закончена.

Продолжите линіи AB, BC и т. д. въ обоихъ направленіяхъ до тѣхъ поръ, пока они не образуютъ пятиконечную звѣзду.

На англійскія мѣры 1 д. соотвѣтствуетъ длинѣ AB.

2. Это тѣло называется *пятиугольной* пирамидой. Ея основаніе пятиугольникъ, который имѣетъ также пять сторонъ. Вообще всякая грань имѣетъ столько сторонъ, сколько и угловъ.

3. Разсмотрите сдѣланную модель, измѣрьте ее и напишите отвѣты на слѣдующіе вопросы:

1. Число граней?
2. Число реберъ?

3. Число вершинъ?

4. Форма граней и число граней каждой формы?

5 Всѣ ли ребра одинаковой длины? Если нѣтъ, то какой длины и сколько реберъ?

6. Число угловъ на граняхъ?

7. Одинаковой ли величины углы на граняхъ? Если нѣтъ, то скольких величинъ?

8. Число двугранныхъ угловъ?

9. Одинаковой ли величины двугранные углы? Если нѣтъ, то сколькихъ величинъ?

10. Число тѣлесныхъ угловъ?

11 Число граней, которыя образуютъ каждый тѣлесный уголъ.

ГЛАВА X.

Шистиугольная пирамида.

Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 20 сантиметровъ × × 20 сантиметровъ (8 д. × 8 д.).

Постройте равносторонній треугольникъ XYZ со сторонами въ 9 сантиметровъ ($1^1/_2$ д.).

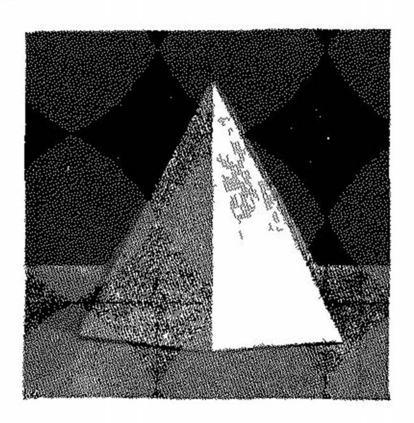


Рис. 100.

Раздѣлите каждую сторону на равныя части, по 3 см. ($1^1/_2$ д.) каждая; точки дѣленія будутъ A, B, C, D, E, F.

Проведите AB, CD, EF, такимъ образомъ будетъ закончена внутренняя часть діаграммы. Она имѣетъ шесть равныхъ между собою пунктирныхъ сторонъ.

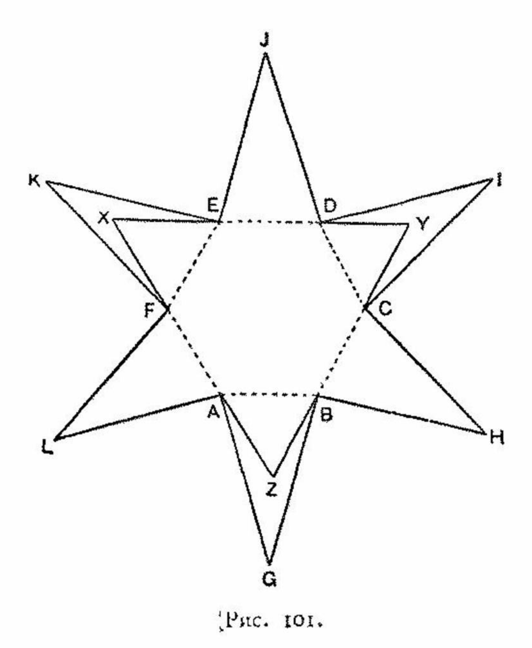


Рис. 101.

Рис. 102.

На каждой изъ этихъ сторонъ AB, BC, CD и т. д. постройте равнобедренные треугольники съ углами при A, B, C и т. д. по 75° каждый; такимъ образомъ получится шестиконечная звѣзда G, H, I, J, K, L.

ГЛАВА XI.

Многоугольники и симметрія.

1. Вы знаете, что пирамиды получаютъ свое названіе по формѣ ихъ основаній. Основанія же, такъ же какъ и всѣ грани, получаютъ свои названія слѣдующимъ образомъ:

Во-первыхъ, по числу сторонъ или угловъ, потому что число сторонъ то же самое, что и число угловъ.

Во-вторыхъ, въ зависимости отъ равенства сторонъ.

Въ-третьихъ, въ зависимости отъ равенства угловъ.

Въ-четвертыхъ, въ зависимости отъ равенства и сторонъ и угловъ.

Въ-пятыхъ, въ зависимости отъ особенностей въ размѣщеніи сторонъ и угловъ.

Общее названіе для грани есть *многоугольникъ*, но обыкновенно это названіе примѣняется къ гранямъ, которыя имѣютъ болѣе, чѣмъ четыре угла, т.-е. больше, чѣмъ четыре стороны.

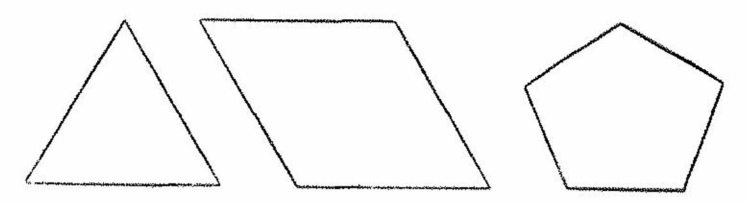


Рис. 103. Равносторонніе многоугольники.

Если всѣ стороны грани равны другъ другу, то она называется *равностороннимъ многоугольникомъ*.

Если всѣ углы грани равны другъ другу, то она называется *равноугольнымъ многоугольникомъ*.

Если грань въ одно время и *равносторонняя* и *равноугольная*, то она называется *правильнымъ многоугольникомъ*.

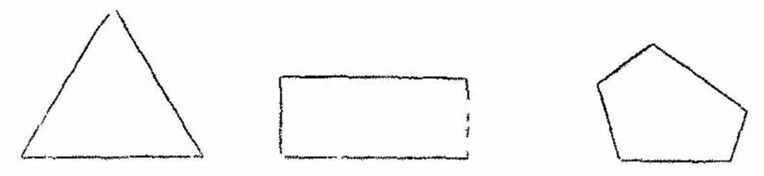


Рис. 104. Равноугольные многоугольники.

2. **Многоугольникъ называется симметричнымъ въ отношенiи прямой линiи**, если эта линiя дѣлитъ его на такiя двѣ части, что если фигуру вращать на этой линiи,

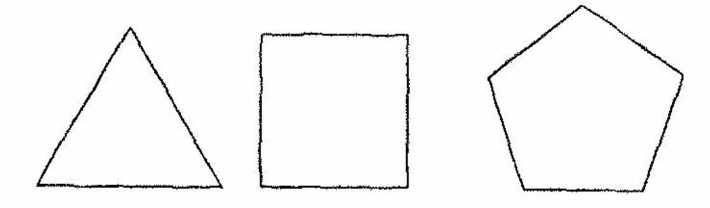


Рис. 105. Правильные многоугольники.

какъ на оси, то обѣ части ея будутъ обмѣниваться мѣстами такъ, что каждая половина будетъ занимать въ точности пространство, которое передъ этимъ занимала другая половина. Прямая линiя при этомъ называется осью симметрiи.

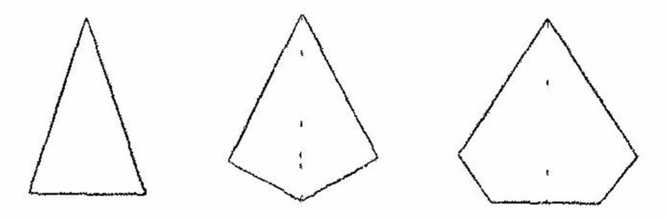


Рис. 106 Симметричные многоугольники.

Вы можете испробовать это на опытѣ Прежде всего постройте симметричный многоугольникъ слѣдующимъ образомъ. начертите квадратъ ABCD со стороною въ 4 см. (2 д) длиною

Проведите EF, соединяющую среднія точки двухъ противоположныхъ сторонъ AB и CO. Раздѣлите каждую сторону на четыре равныя части.

Проведите PL и MN, соединяющія точки дѣленія, ближайшія къ O и C.

Проведите EP и EN.

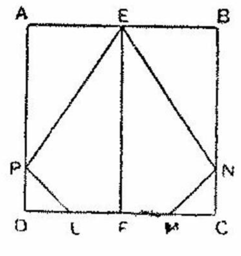


Рис. 107.

Такимъ образомъ будетъ построенъ симметричный многоугольникъ LMNEP, для котораго EF—ось симметріи. При помощи линейки и ножа вырѣжьте этотъ многоугольникъ, такъ чтобы всѣ стороны вырѣзаннаго отверстія цѣликомъ сохранились на бумагѣ. Тогда переверните многоугольникъ и вложите его въ бумагу въ обратномъ положеніи. Вы увидите, что концы оси EF будутъ находиться на своихъ прежнихъ мѣстахъ; но N и P, M и Z перемѣнятся мѣстами; такимъ образомъ всѣ точки многоугольника, за исключеніемъ точекъ на оси, обмѣняются мѣстами другъ съ другомъ.

Начертите слѣдующія фигуры, всѣ симметричныя относительно одной линіи, и потомъ проведите ихъ оси:

1. Равнобедренный треугольникъ.
2. Прямая линія.
3. Уголъ съ равными боками.
4. Равносторонній треугольникъ (три оси).
5. Квадратъ (четыре оси).
6. Прямая линія, встрѣчающаяся въ своей средней точкѣ съ двумя равными прямыми линіями, такъ что всѣ онѣ образуютъ три угла, каждый по 60^0.
7. Прямоугольникъ (двѣ оси).
8. Параллелограммъ съ равными углами
9. Ромбъ (двѣ оси)
10 Трапеція съ двумя равными боками.

Двѣ фигуры, если онѣ разсматриваются вмѣстѣ, могутъ быть симметричны относительно одной линіи

Напримѣръ, вы можете начертить чернилами многоугольникъ и раньше, чѣмъ чернила высохнутъ, вы можете сложить бумагу такъ, чтобы получился отпечатокъ на другой половинѣ бумаги Тогда многоугольникъ и его отпечатокъ будутъ симметричны по отношенію къ складкѣ на бумагѣ, которая будетъ представлять ось

3. **Фигура называется симметричной по отношенію къ какой-нибудь точкѣ** въ томъ случаѣ, если она, бу-

дучи повернута на полкруга около этой точки, какъ на шпилѣ, вполнѣ точно покрываетъ каждую часть поверхности, которая была занята при ея прежнемъ положенiи. Точка вращенiя называется *центромъ симметрiи* Въ этомъ случаѣ фигура при вращенiи не выходитъ изъ своей плоскости; тогда какъ, если она вращается на оси, она сразу покидаетъ плоскость и возвращается на нее при полномъ опрокидыванiи.

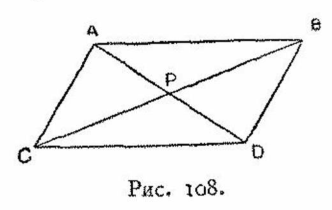


Рис. 108.

Вы можете убѣдиться въ этомъ на опытѣ Начертите параллелограммъ ABCD *и соедините его противоположные* углы прямыми линiями, точка P, гдѣ пересѣкаются эти линiи (дiагонали), будетъ точкой или центромъ симметрiи Вырѣжьте фигуру ножомъ, не повреждая сторонъ вырѣзки Положите фигуру на ея мѣсто и проколите булавкой черезъ точку P Потомъ повертывайте фигуру около булавки до тѣхъ поръ, пока вырѣзка въ бумагѣ опять закроется. Вы увидите, что всѣ точки, за исключенiемъ точки P, *будутъ передвинуты; каждая изъ нихъ перемѣнится* мѣстомъ съ другой, которая будетъ на одинаковомъ съ нею разстоянiи отъ булавки, такимъ образомъ A перемѣнится мѣстомъ съ D, B съ C.

Начертите слѣдующiя фигуры, которыя всѣ симметричны по отношенiю къ одной точкѣ, и обозначьте эту точку во всѣхъ случаяхъ буквой P.

11. Прямая линiя.

12. Квадратъ

13. Прямая линiя съ двумя равными линiями, перпендикулярными къ ея концамъ и идущими въ различныхъ направленiяхъ

14. Ромбъ.

15 Двѣ неравныхъ перпендикулярно-пересѣкающихся прямыхъ, дѣлящихъ другъ друга въ точкѣ пересѣченiя пополамъ

16. Двѣ равныхъ параллельныхъ линiи.

17. Двѣ пересѣкающiяся неравныя прямыя, дѣлящiя другъ друга *на равныя части, но между собой не перпендикулярныя.*

18. Прямоугольникъ.

19. Прямая линiя, отъ концовъ которой идутъ въ разныхъ направленiяхъ двѣ равныя линiи, образующiя съ первой линiей каждая уголъ въ 60^0.

20. Прямая линiя, черезъ концы которой проходятъ двѣ равныя параллельныя линiи, которыя первая линiя дѣлитъ на равныя части

Двѣ фигуры могутъ быть симметричны по отношенію къ одной какой-нибудь точкѣ.

Вырѣжьте многоугольникъ какого-нибудь вида Обведите его на бумагѣ, потомъ поверните многоугольникъ на полъ-оборота, такъ чтобы одна сторона была бы прямымъ продолженіемъ самой себя въ своемъ прежнемъ положеніи, и обведите многоугольникъ другой разъ. Оба очертанія вмѣстѣ будутъ симметричны по отношенію къ точкѣ, находящейся посрединѣ между двумя ближайшими вершинами.

Предыдущіе примѣры представляютъ то, что называется двойной симметріей по отношенію къ одной точкѣ. Равносторонній треугольникъ есть примѣръ тройной симметріи; въ этомъ случаѣ фигура, при поворачиваніи на одну треть оборота около одной точки, занимаетъ то же самое мѣсто, какъ и въ началѣ; и послѣ третьяго передвиженія она приходитъ въ первоначальное положеніе По тому же самому основаніе пятиугольной пирамиды (въ гл. IX) имѣетъ пятиричную симметрію. Всѣ правильные многоугольники имѣютъ столь кратную симметрію, сколько они имѣютъ сторонъ. Кромѣ того, фигура можетъ имѣть симметрію различныхъ видовъ; такимъ образомъ основаніе шестиугольной пирамиды (въ гл. X) имѣетъ дву-, трех- и шестикратную симметрію

Сколь кратную симметрію имѣютъ фигуры въ гл XXV. 13, часть II?

21. Задача	1.	25. Задача	16.
22. „	5.	26. „	20.
23. „	11.	27. „	24.
24. „	14	28. „	25.

29. Симметричны ли ваши руки по отношенію къ линіи или точкѣ?

30. Сколькихъ родовъ симметрія существуетъ у такихъ цвѣтовъ, какъ клематисъ и нарцисъ?

31 Какого рода симметрію имѣютъ листья на вѣткахъ?



Рис. 109

4. Сумма всѣхъ сторонъ многоугольника, которыя его ограничиваютъ, называется **периметръ**, или обводъ.

Слово „периметръ“ значитъ „обмѣръ кругомъ“.

Определите периметръ слѣдующихъ фигуръ:

32. Ромба, сторона котораго равна 5 см.

33. Прямоугольника, длина котораго 5 см, а высота 3 см.

34. Квадрата, двѣ стороны котораго имѣютъ вмѣстѣ 8 см

35. Параллелограмма, двѣ стороны котораго имѣютъ 3 см и 7 см.

36. Параллелограмма, у котораго разстояніе отъ одной вершины до противоположной, измѣренное по сторонамъ, равно 12 см

37. Равносторонняго треугольника, одна сторона котораго равна 4 см

38. Равносторонняго треугольника, двѣ стороны котораго, взятыя вмѣстѣ, равны 10 см.

39. Равносторонняго многоугольника, ограниченнаго восемью сторонами, одна изъ которыхъ равна 2 см

40. Равносторонняго многоугольника, ограниченнаго двѣнадцатью сторонами, пять изъ которыхъ вмѣстѣ составляютъ 15 см

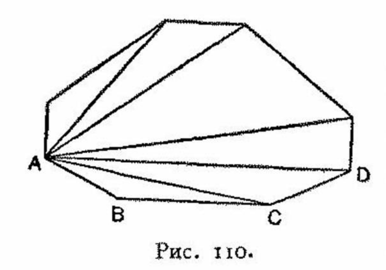


Рис. 110.

5. **Діагональю** многоугольника называется прямая линія, проведенная между какими-нибудь его вершинами, не соединенными уже стороной.

Слово „діагональ" значитъ „черезъ вершины" Такимъ образомъ AC и AD есть діагонали, но діагональ не можетъ быть проведена между A и B, потому что эти вершины уже соединены стороною AB

41. Сколько діагоналей можете вы провести изъ одной вершины прямоугольника?

42. Сколько различныхъ діагоналей можете вы провести между всѣми вершинами прямоугольника?

43. Если вы проведете діагональ въ квадратѣ, то какого вида будуть части, на которыя онъ раздѣлится?

44 Почему нельзя провести діагонали въ треугольникѣ?

45. Начертите многоугольникъ съ пятью сторонами и потомъ проведите всѣ, какія вы можете, діагонали изъ одной какой-нибудь вершины

46. На сколько частей раздѣлили вы этотъ многоугольникъ?

47. Какой видъ имѣетъ каждая часть?

6. **Измѣненіе формы многоугольника.** Многоугольникъ можетъ имѣть безконечно разнообразную форму при той же самой длинѣ его сторонъ.

Вы можете провѣрить это, сложивши изъ деревянныхъ палочекъ какой-нибудь многоугольникъ и связавши ихъ концы нитками, кото-

рыя будутъ дѣйствовать, какъ шарниръ. Вы увидите, что въ то время, какъ вы будете раздвигать и сжимать фигуру, она будетъ получать различный видъ

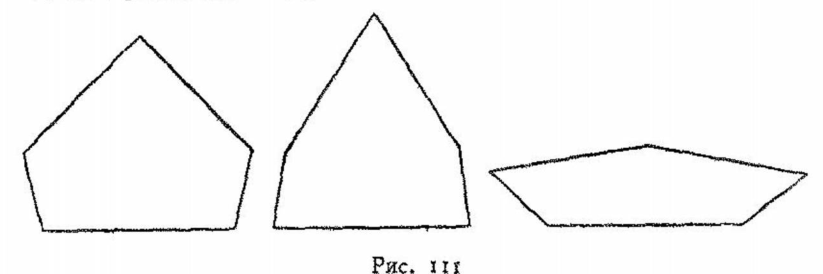


Рис. 111

Даже четырехсторонняя фигура можетъ измѣнять свою форму; квадратъ можетъ превратиться въ ромбъ, а прямоугольникъ въ параллелограммъ.

Одни треугольники составляютъ исключенiе. Разъ треугольникъ построенъ, вы не можете измѣнить его вида, не измѣняя длины его сторонъ.

Для плотниковъ очень важно это свойство треугольниковъ—не измѣнять свою форму. Важно это при сооруженiи остова построекъ или при постройкѣ около нихъ лѣсовъ.

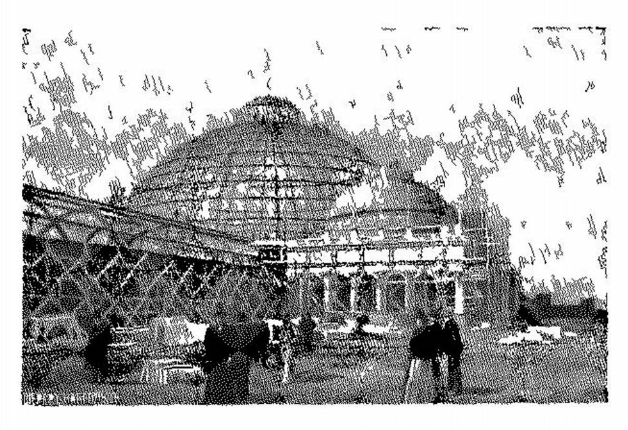


Рис 112. Огородный отдѣлъ на выставкѣ въ Чикаго во время постройки.

Рисунокъ 112 представляетъ часть огороднаго отдѣла на Всемiрной выставкѣ въ Чикаго, какимъ онъ былъ во время постройки. Вертикальныя и горизонтальныя бревна лѣсовъ образуютъ ряды прямоугольниковъ, которые подъ тяжестью могутъ спадаться, даже если

скрѣпы держатъ прочно Но вы замѣтите, что каждый прямоугольникъ имѣетъ двѣ доски, сбитыхъ гвоздями діагонально накрестъ и обращающихъ прямоугольникъ въ четыре треугольника, которые къ прочности скрѣпленій прибавляютъ еще прочность геометрическую.

Другой обыкновенный примѣръ—это ворота. Они должны бы осѣсть черезъ нѣкоторое время, т.-е. должны измѣнить форму квадрата или прямоугольника на ромбъ или параллелограммъ; но распорка съ угла на уголъ превращаетъ прямоугольникъ въ два треугольника, которые должны сохранять свою форму, покуда не загніетъ дерево или не расшатаются связи (рис. 113).

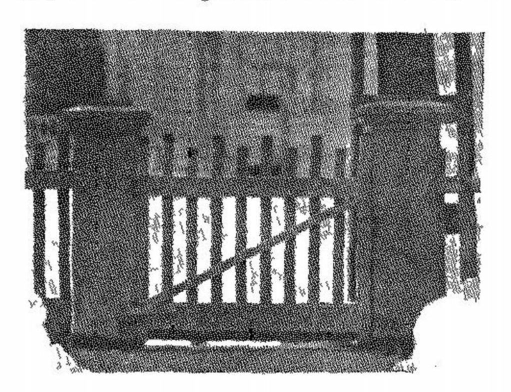


Рис. 113.

Разсмотримъ, сколько нужно поперечинъ, чтобы многоугольникъ сохранялъ свою форму. Мы видѣли, что плотникъ употребляетъ двѣ поперечины для каждаго прямоугольника въ лѣсахъ и только одну въ воротахъ, хотя обѣ фигуры прямоугольники. Но плотникъ сообразуется съ прочностью матеріала и съ тѣмъ, что длинная доска скорѣе согнется, чѣмъ короткій брусокъ. Если же не принимать этого во вниманіе, то вопросъ будетъ простой: сколько діагоналей должны вы провести въ многоугольникѣ, чтобы разбить его на треугольники? Сдѣлайте опыты съ многоугольниками съ различнымъ числомъ сторонъ, въ каждомъ случаѣ выбирая одну вершину, отъ которой вы поведете діагонали. Вы найдете, что необходимое число діагоналей всегда на три меньше, чѣмъ число сторонъ.

ГЛАВА XII.

Усѣченная пирамида.

1. Обратите вниманіе на крышу зданія, изображеннаго на рис. 114. Ея скаты направляются вверхъ отъ карнизовъ такъ, какъ будто бы они встрѣтятся въ одной вершинѣ и обра-

зуютъ боковыя грани пирамиды; но вмѣсто того они низко



Рис. 114.

срѣзаны плоской площадкой крыши, и остается какъ будто только *нижняя часть пирамиды*.

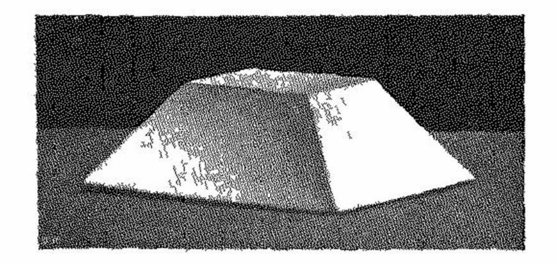


Рис. 115

Если сѣкущая плоскость проходитъ параллельно основанію пирамиды и ея верхняя часть (между плоскостью и вершиной) удалена, то нижняя часть тѣла называется *усѣченной пирамидой*.

Сдѣлаемъ модель квадратной усѣченной пирамиды (рис. 115).

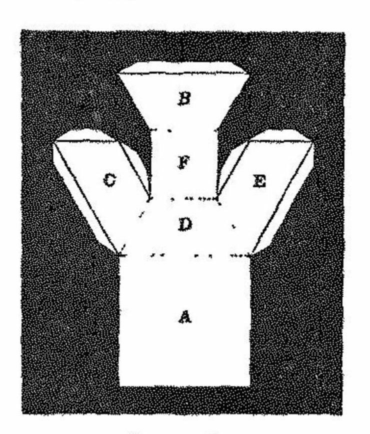


Рис. 116.

2. Діаграмма требуетъ куска бумаги въ 14 сантиметровъ $\times$ 12 сантиметровъ ($5^1/_2$ д. $\times$ 5 д.).

A—квадратъ со стороною въ 5 см. (2 д.).

B, C, D и E—равныя трапеціи; бóльшая сторона каждой изъ нихъ равна 5 см. (2 д), а другія всѣ стороны по 2 сант 5 миллим. (1 д); углы при концахъ длинныхъ сторонъ равны 60⁰.

F—квадратъ со сторонами по 2 см. 5 мм. (1 д.).

3 Усѣченная пирамида имѣетъ два основанія Нижнее основаніе есть основаніе самой пирамиды и можетъ, слѣдовательно, имѣть какое угодно число сторонъ и какую угодно форму Верхнее основаніе образовано сѣкущей плоскостью и есть уменьшенная копія нижняго основанія.

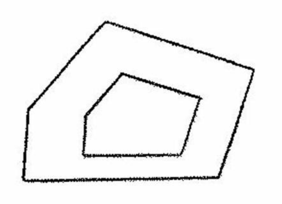


Рис. 117 Подобные многоугольники.

Два такихъ многоугольника, которые по формѣ совершенно сходны и представляютъ одинъ уменьшенную копію другого, называются *подобными* многоугольниками.

Другія, т.-е. боковыя грани усѣченной пирамиды, всегда трапеціи. Онѣ могутъ быть и могутъ не быть равными и подобными одна другой.

1. Какая площадь нижняго основанія усѣченной пирамиды, которую вы сдѣлали?

2. Какая площадь верхняго основанія?

3. Какая форма той части пирамиды, которая удалена, чтобы получить усѣченную пирамиду?

4. Если призма будетъ разсѣчена плоскостью, параллельной основанію, то какого вида будутъ части, на которыя распадется призма?

ГЛАВА XIII.

Скошенная пирамида.

1. Если вы разсмотрите крыши двухъ самыхъ высокихъ башенъ Шильонскаго замка, вы увидите, что хотя онѣ представляютъ собою части пирамидъ, но онѣ не усѣченныя пирамиды, такъ какъ верхушка каждой башни не плоскость, а ребро. Сѣкущая плоскость, слѣдовательно, не параллельна основанію.

Если пирамида разсѣчена плоскостью не параллельной основанію и часть между этой плоскостью и вершиной удалена, то остатокъ тѣла называется *скошенной пирамидой.*

Въ нашемъ случаѣ пирамиды скошены двумя плоскостями, изъ которыхъ каждая наклонена къ основанію, и вслѣдствіе

этого получается форма, которая обыкновенно въ архитектурѣ называется „крыша съ конькомъ".



Рис 118 Шильонскій замокъ

Мы сейчасъ сдѣлаемъ модель скошенной пирамиды, образованной одной сѣкущей плоскостью (рис. 119).

2. Діаграмма требуетъ куска бумаги въ 16 см. $\times$ 14 см. ($6^1/_2$ д $\times$ $5^1/_2$ д.)

Построеніе можно видѣть на рис. 120, 121

A—квадратъ, сторона котораго—6 см (3 д); на каждой сторонѣ квадрата построенъ равностороннійтреугольникъ

B—трапеція, для полученія которой на сторонахъ одного изъ треугольниковъ откладываются отъ угловъ квадрата разстоянія по 4 см. (2 д.) и проводится четвертая сторона *y*, которая будетъ имѣть 2 см (1 д.)

D и E—четыреугольники. Для полученія ихъ на сторонахъ двухъ противоположныхъ треугольниковъ откладываются отъ угловъ квадрата разстоянія по 4 см. и 2 см (2 д и 1 д) и проводятся четвертыя

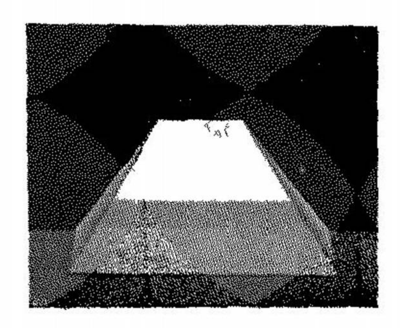


Рис. 119.

стороны *a*, которыя будутъ перпендикулярны къ одной сторонѣ каждаго треугольника.

C—трапеція Для полученія ея на сторонахъ послѣдняго треугольника отъ угловъ квад-

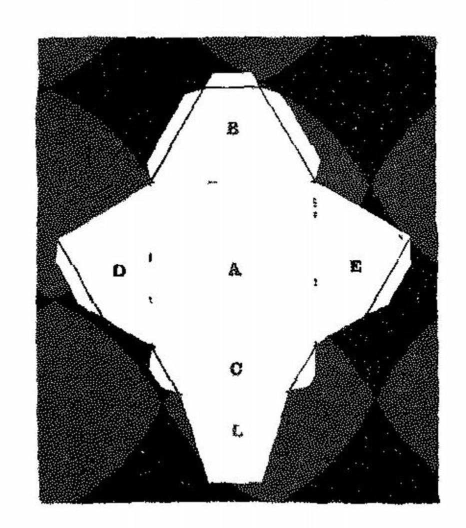


Рис. 120

рата откладываются разстоянія по 2 см (1 д.) и проводится четвертая сторона z, которая будетъ имѣть 4 см. (2 д.).

L—трапеція Для полученія ея въ средней точкѣ z *возстановляется* перпендикуляръ 33 миллиметра (или $1^5/_8$ д.) длиною и проводится вторая сторона w 2 см (1 д.) длиною, параллельная z и раздѣленная перпендикуляромъ на двѣ равныя части, потомъ *проводятся двѣ другихъ стороны*, которыя каждая будутъ равны x.

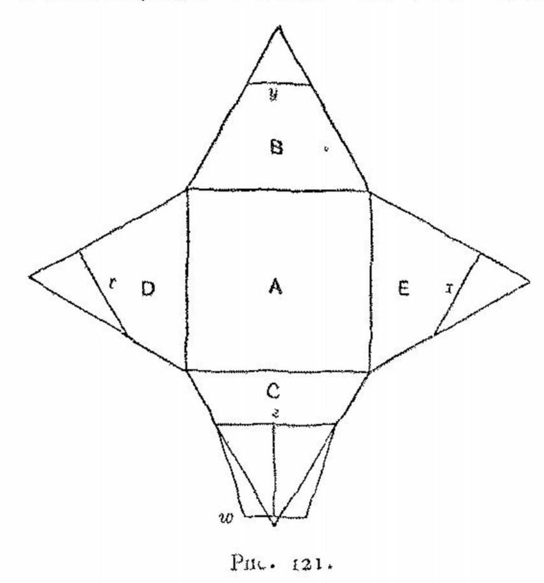


Рис. 121.

3 Основаніе скошенной пирамиды— это основаніе первоначальной пирамиды и, *слѣдовательно*, можетъ имѣть какое угодно число сторонъ и какую угодно форму.

Грань, образованная сѣкущей плоскостью, называется *наклоннымъ сѣченіемъ*.

Другія, т.-е. боковыя, грани или трапеціи, или просто четыреугольники.

Назовите каждую грань вашей пирамиды

Есть ли между ними равныя другъ другу грани?

ГЛАВА XIV.

Кривыя поверхности и линіи.

1. Мы теперь начнемъ изученіе кривыхъ поверхностей и кривыхъ *линій*. *Кривыя—это значитъ* „изогнутыя безъ угловъ". Если вы будете прикладывать прямое ребро линейки къ различнымъ поверхностямъ, то вы увидите, что вы можете это сдѣлать только при нѣкоторыхъ положеніяхъ линейки; иногда же вамъ это не удается ни при какомъ ея

положеніи; такія поверхности кривыя. Вѣроятно, вы можете найти въ комнатѣ предметы, имѣющіе кривыя поверхности, и нѣкоторыя изъ нихъ вы можете провѣрить ребромъ линейки. Можетъ-быть, вамъ попадутся кривыя поверхности, къ которымъ вы можете приложить линейку въ нѣкоторыхъ направленіяхъ, но не во всѣхъ, какъ это можно сдѣлать относительно плоскости; но для большинства кривыхъ поверхностей не найдется такого направленія, по которому можно бы было приложить къ нимъ прямое ребро линейки.

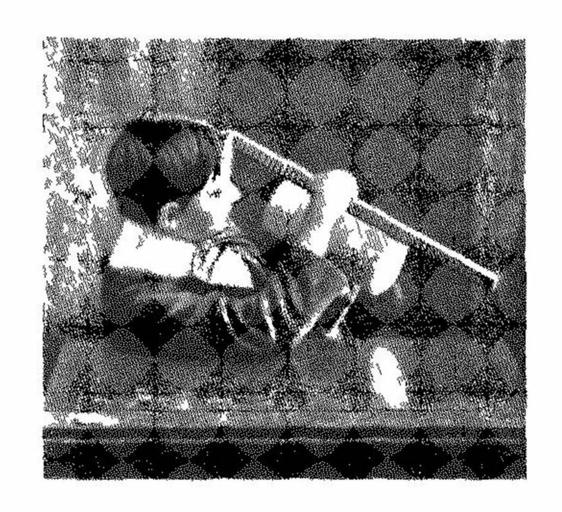


Рис 122 Опредѣленіе кривой поверхности.

Поверхность воды, если ея немного, можно разсматривать какъ *плоскость; но большое водное пространство* (въ морѣ, въ *огромныхъ* озерахъ), хотя бы вода была и спокойна, должно имѣть кривую поверхность, потому что вода принимаетъ форму земной поверхности, которая кривая.

Кривыя ребра или стороны, то-есть кривыя линіи, образуются кривыми поверхностями, пересѣкающими другія поверхности — кривыя или плоскія. Такимъ образомъ плоская поверхность можетъ имѣть кривую сторону.

2 Самая извѣстная плоская фигура, ограниченная кривой линіей, это кругъ

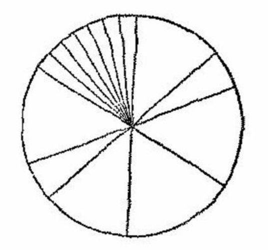


Рис. 123.

Возьмите точку на бумагѣ; потомъ отъ этой точки проведите по линейкѣ нѣсколько прямыхъ линій, каждая по 2 см. (1 д.) длиною. Если вы проведете эти линіи совсѣмъ близко

другъ отъ друга, то вы увидите, что ихъ концы могутъ быть соединены кривой линіей; эта линія называется *окружностью* круга.

Каждая изъ этихъ прямыхъ линій называется *радіусомъ* круга; радіусъ значитъ „лучъ".

Точка, отъ которой вы проводили равныя прямыя, называется *центромъ* круга.

Кругъ—это часть плоскости, ограниченная кривою линіей, всѣ части которой находятся на одинаковомъ разстояніи отъ одной внутренней точки, которая называется центромъ.

Слово „кругъ" иногда относится къ кривой, которая его ограничиваетъ; но для точности вы должны называть кривую линію окружностью, а ограниченную ею площадь—кругомъ.

Радіусы измѣряютъ разстояніе между центромъ и окружностью и, слѣдовательно, всѣ равны другъ другу.

Рис. 124. Дуга.

Дуга — это какая-нибудь часть окружности.

Діаметръ — это прямая линія, проведенная черезъ центръ круга и ограниченная окружностью. Всякій діаметръ дѣлитъ кругъ на двѣ равныя части.

Сколько нужно взять радіусовъ, чтобы получить одинъ діаметръ? Равны ли другъ другу всѣ діаметры одного круга?

Кругъ и прямоугольникъ—самыя употребительныя формы въ произведеніяхъ человѣка. Вѣроятно, вы можете найти вокругъ себя много предметовъ, имѣющихъ эти формы; но въ природѣ кругъ очень рѣдко встрѣчается.

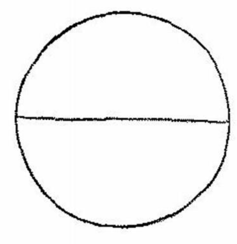


Рис. 125. Діаметръ.

3. Кривыя желѣзнодорожныхъ путей. Кривыя линіи могутъ быть параллельны одна другой, и тогда, какъ и при прямыхъ параллельныхъ линіяхъ, разстояніе между ними остается постояннымъ.

Желѣзнодорожные рельсы—вотъ наглядный примѣръ такихъ линій.

Можете ли вы представить себѣ другіе примѣры такихъ линій?

Въ одномъ отношеніи кривая линія совершенно отличается отъ прямой линіи. Вы видѣли, что прямая линія *сохраняетъ* одно направленіе по всему своему протяженію. Кривая же линія *измѣняетъ* свое направленіе на всемъ своемъ протяженіи.

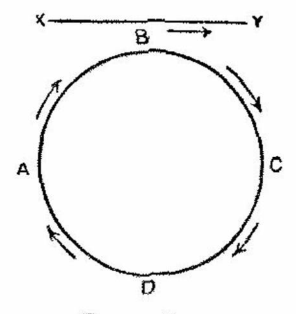


Рис. 126.

Такъ, на изображенной кривой, если вы приставите конецъ вашего карандаша къ точкѣ А и будете итти по кривой кругомъ черезъ точки В, С и D опять до А, вы увидите, что вашъ карандашъ все время будетъ мѣнять свое направленіе Въ точкѣ С онъ будетъ двигаться въ обратномъ направленіи, чѣмъ въ началѣ; въ точкѣ D въ обратномъ направленіи, чѣмъ онъ двигался въ точкѣ В; и наконецъ онъ получаетъ первоначальное направленіе, когда возвратится въ точку отправленія А.

Замѣтьте также, что если вы сравните направленіе кривой съ направленіемъ какой-нибудь прямой линіи, такой, какъ *xy*, то должна быть такая точка, гдѣ кривая и прямая линіи имѣютъ одно и то же направленіе; но въ то время, какъ прямая продолжается въ томъ же направленіи, кривая немедленно измѣняетъ свое направленіе на новое.

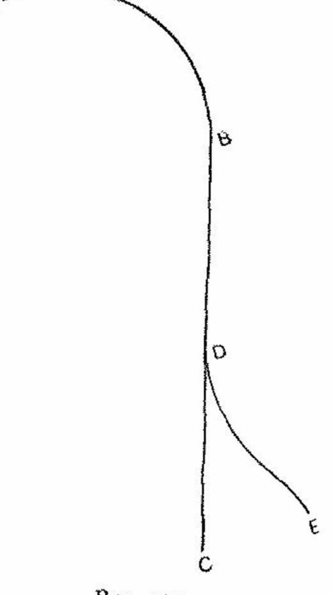


Рис. 127.

Важное примѣненіе этой истины дѣлается при укладкѣ рельсъ; благодаря этому поѣзда могутъ измѣнять свое направленіе, не сходя съ рельсъ. Предположите, что путь АВ есть кривая и въ точкѣ В направленіе пути переходитъ въ прямую линію Тотъ, кто составляетъ проектъ дороги, находитъ направленіе кривой въ В, находитъ радіусъ въ этой точкѣ, чертитъ къ нему перпендикуляръ ВС, вдоль котораго и проводитъ путь. Такъ что, когда поѣздъ отъ А доходитъ

до В, онъ принимаетъ направленіе, какое въ то время имѣетъ, и идетъ дальше по прямой линіи до С.

Если въ какой-нибудь точкѣ D другая кривая имѣетъ то же направленіе, какъ ВС, и если оба пути уложены до Е такъ же, какъ до С, то поѣздъ изъ А, достигнувши D, могъ бы пойти въ обоихъ направленіяхъ, но „стрѣлка" предупреждаетъ это, отрѣзая тотъ путь, который не нуженъ.

На правой сторонѣ рисунка 127 можно видѣть домъ, изъ котораго дается направленіе всѣмъ стрѣлкамъ и поѣздамъ.

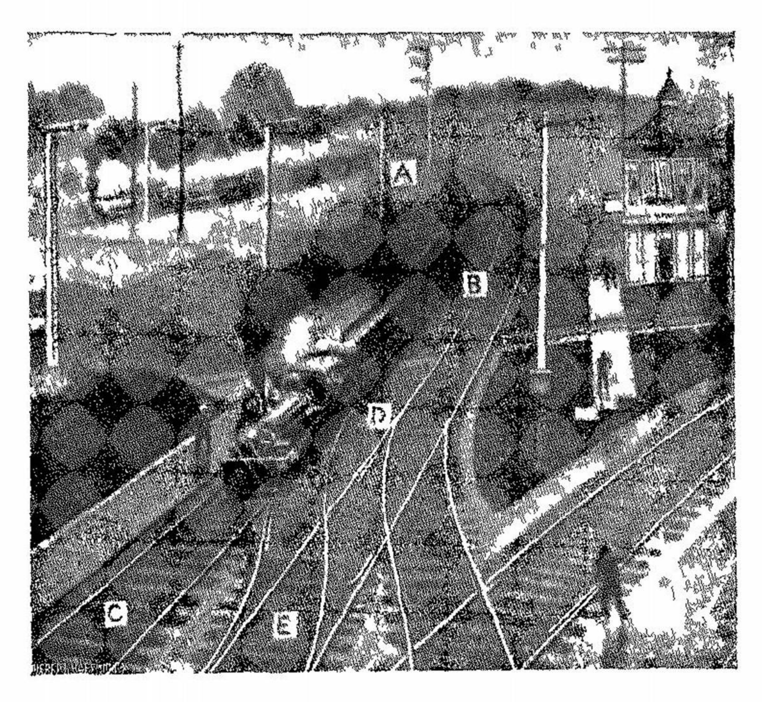


Рис. 128. Узловая станція, гдѣ соединяется нѣсколько путей.

4. **Три способа черченія окружности.** Впослѣдствіи вы много узнаете о кругахъ, но сейчасъ вамъ достаточно только научиться вычерчивать фигуры, основанныя на окружностяхъ.

Прежде всего вы узнаете, какъ можно начертить кругъ. Для этого есть много способовъ, изъ которыхъ вы можете пользоваться тремя.

Прежде всего окружность можетъ быть начерчена *цирку-*

лемъ (циркуль значитъ „кругъ, кольцо"). Циркуль состоитъ изъ двухъ раздвигающихся ножекъ, изъ которыхъ одна имѣетъ на концѣ *карандашъ или* перо.

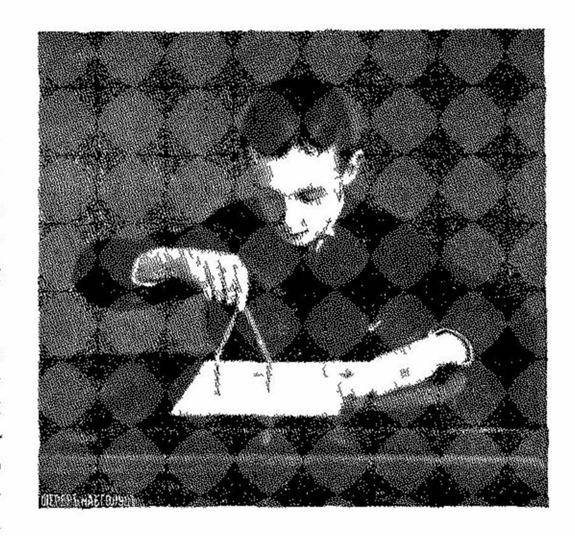


Рис. 129 Вычерчиваніе окружности циркулемъ

Чтобы начертить кругъ циркулемъ, поставьте заостренный конецъ прочно на бумагу и двигайте легко конецъ съ карандашомъ до тѣхъ поръ, пока линія не обойдетъ кругомъ до точки отправленія. Точка, гдѣ остается неподвижный конецъ циркуля, есть центръ круга; разстояніе между концами ножекъ циркуля есть длина радіуса, и такъ какъ это разстояніе не измѣняется во время движенія ножекъ, то кривая, которую вы начертили, есть окружность круга, а ограниченное ею пространство есть самъ кругъ

Изъ практики вы найдете, что циркуль лучше употреблять держа его между большимъ и указательнымъ пальцемъ, и только нажимайте достаточно крѣпко, чтобы не дать неподвижной ножкѣ соскользнуть со своего мѣста въ центрѣ.



Рис 130. Вычерчиваніе окружности шнуркомъ.

Во-вторыхъ, если у васъ нѣтъ циркуля, вы можете начертить окружность при помощи шнурка, у котораго на

каждомъ концѣ сдѣлано по петлѣ. Длина шнурка будетъ радіусъ.

Воткните булавку въ то мѣсто, гдѣ будетъ центръ вашего круга; на булавку надѣньте одну петлю; потомъ помѣстите кончикъ каран-



Рис. 131. Вычерчиванie окружности веревкой

даша въ другую петлю, туго натяните шнурокъ надъ бумагой и водите карандашомъ вокругъ. Его конецъ начертитъ окружность (рис. 130)

Этотъ способъ удобенъ въ томъ случаѣ, если вы хотите начертить очень большой кругъ, напримѣръ, на землѣ; только тогда вамъ надо брать колъ, веревку и заостренную палку, чтобы очерчивать окружность (рис. 131).



Рис 132. Вычерчиванie окружности картонной полоской

Въ-третьихъ, вы можете начертить окружность при помощи картонной полоски, въ которой сдѣлано двѣ небольшихъ дырочки.

Картонная полоска кладется на бумагу; въ одну изъ дырочекъ ставится булавка въ томъ мѣстѣ, гдѣ будетъ центръ; потомъ кончикъ карандаша вставляется въ другую дырочку, и картонка вращается вмѣстѣ съ карандашомъ, конецъ котораго очерчиваетъ окружность.

Этотъ способъ имѣетъ то удобство, что такъ какъ разстояніе между дырочками въ картонѣ есть длина радіуса, то рядъ дырочекъ въ картонѣ можетъ быть сдѣланъ на разныхъ разстояніяхъ; такимъ образомъ можно избѣжать постояннаго измѣренія длины радіуса.

ГЛАВА XV.

Цилиндръ.

1. На рисункѣ 133 вы можете видѣть примѣры того, что называется „круглыми тѣлами".

Это *цилиндръ* (слово „цилиндръ" значитъ „валъ, катокъ"). Цилиндръ имѣетъ три поверхности. Двѣ изъ нихъ,

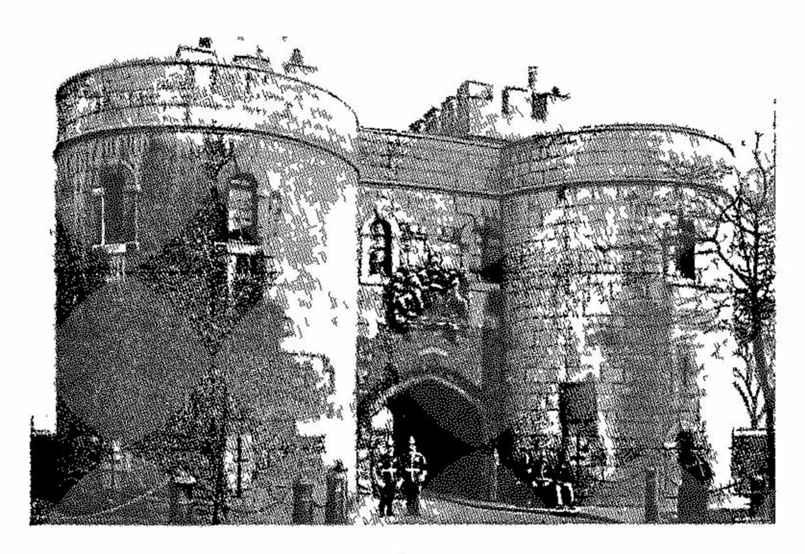


Рис. 133. Башни Тауэра въ Лондонѣ.

равныя и параллельныя плоскости, называются основаніями цилиндра, а третья—кривая поверхность. Ребра цилиндра изогнутыя, кривыя. Цилиндръ не имѣетъ вершинъ. Цилиндръ обычная форма человѣческихъ издѣлій; вѣроятно, вы можете

вспомнить много предметовъ, имѣющихъ эту форму; напр: карандаши, части машинъ и т. п

Сейчасъ мы сдѣлаемъ модель цилиндра

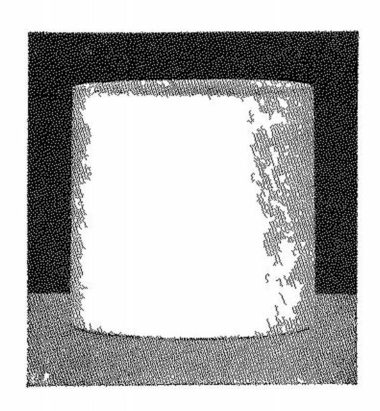


Рис 134.

2. Діаграмма требуетъ бумаги въ 16 см. × 15 см. ($6^1/_2$ д × 6 д).

Прежде всего начертите прямоугольникъ ABCD со сторонами 15 см 7 мм. ($6^9/_{32}$ д.) и 5 см (2 д).

Потомъ изъ L и R, какъ изъ центра, радіусомъ въ 25 мм (1 д) очертите круги такъ, чтобы они могли лишь коснуться длинныхъ сторонъ прямоугольника Отвороты этихъ длинныхъ сторонъ вырѣзываются зубчиками и дѣлаются шире, чѣмъ обыкновенно.

При вырѣзываніи фигуры будьте осторожны, чтобы не оторвать двухъ круговъ отъ прямоугольника

Сначала склейте стороны AC и BD потомъ приклеите другіе отвороты съ внѣшней стороны круговыхъ реберъ L и R, эти ребра должны быть для крѣпости еще разъ проклеены узкой полоской бумаги. Можно также сдѣлать круги немного

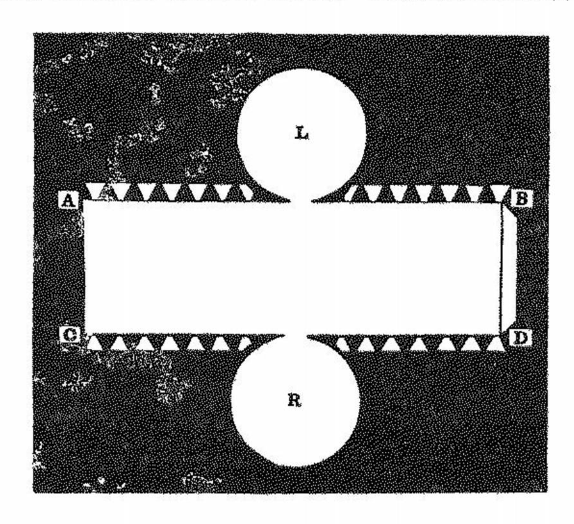


Рис. 135.

меньше, такъ чтобы они входили внутрь фигуры, и потомъ покрыть ихъ кругами настоящей величины

3 1. Похожъ ли этотъ цилиндръ на призму?

2. Какое наименьшее число граней можетъ ограничивать призму? Какая форма ея основаніи?

3. Что такое прямая линія? Бываютъ ли различныя прямыя линіи?

4 Что такое кривая линія? Бываютъ ли разнообразныя кривыя линіи?

5. Что такое окружность?

6. Что такое кругъ?

7. Что такое дуга?

8 Что такое центръ круга?

9. Какая разница между кругомъ и окружностью?

10. Какая разница между діаметромъ и радіусомъ?

11. Какого вида былъ четыреугольникъ, который вы сгибали, чтобы сдѣлать кривую поверхность цилиндра?

12. Какія двѣ стороны четыреугольника составили кривыя стороны основанія?

13. Въ какомъ отношеніи по длинѣ эти стороны къ окружности основаній?

14. Какія двѣ стороны четыреугольника равны разстоянію между основаніями цилиндра?

15. Этотъ четыреугольникъ образовалъ кривую поверхность, что такое кривая поверхность?

16 Какъ вы можете провѣрить какую-нибудь поверхность кривая она или нѣтъ?

17 Можетъ ли быть проведена прямая линія на кривой поверхности цилиндра?

18. Могутъ ли многія прямыя линіи быть проведены такимъ образомъ? Если да, то какое будетъ ихъ направленіе относительно другъ друга?

19. Можете ли вы представить себѣ, что вашъ цилиндръ какъ разъ помѣщается въ кубическомъ ящикѣ? Если да, то какой размѣръ долженъ имѣть внутри этотъ ящикъ?

20 Можете ли вы приложить ребро линейки къ кривой поверхности вашего цилиндра въ такомъ положеніи, которое показало бы, что прямая линія не могла бы быть начерчена на поверхности въ этомъ направленіи?

4 **Длина окружности какого-нибудь круга** *приблизительно* въ три раза больше своего собственнаго діаметра: въ дѣйствительности она немного длиннѣе, чѣмъ три діаметра; три и одна седьмая діаметра будетъ точнѣе

Вы можете это провѣрить двумя способами. Прежде всего посмотрите еще разъ на ту діаграмму, по которой вы дѣлали цилиндръ:

21. Какая длина діаметра одного изъ круговъ?

22. Какая длина стороны прямоугольника, которая была согнута кольцомъ, чтобы сойтись съ окружностью круга?

23. Разсчитайте, во сколько разъ одна длина больше другой?

Во-вторыхъ, вы можете продѣлать измѣренія на поверхности сдѣланнаго цилиндра, обводя тесьму или узкую полоску бумаги вокругъ кривой поверхности около основанія.

24. Какой приблизительно длины будетъ окружность, діаметръ которой 7 сантиметровъ?

5. **Площадь круга** *приблизительно равна тремъ четвертямъ площади квадрата, у котораго сторона равна діаметру круга.* Такимъ образомъ на прилагаемомъ рисункѣ кругъ занимаетъ около трехъ четвертей квадрата; и части, которыя лежатъ внѣ круга, по угламъ квадрата, составляютъ всѣ вмѣстѣ около одной четверти квадрата.

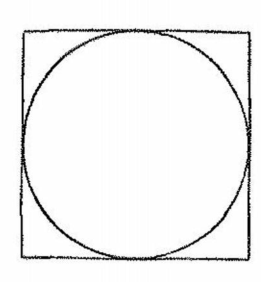


Рис 136

Вы это можете испытать на опытѣ. Въ то же время вы можете узнать объемъ цилиндра.

Сдѣлайте другой цилиндръ, удаливши одно основаніе, и возьмите кубъ, который служилъ для измѣреній.

Прежде всего сложите основанія обоихъ тѣлъ вмѣстѣ и замѣтьте, что діаметръ цилиндра равенъ сторонѣ квадрата.

Потомъ поставьте оба тѣла на горизонтальную плоскость и при помощи линейки, положенной на ихъ верхушки, убѣдитесь, что ихъ высоты равны.

Затѣмъ сравните ихъ объемъ съ помощью песка, воды и т п Вы найдете, что нужно взять четыре объема цилиндра, чтобы составилось три объема куба, или если вы наполните водою цилиндръ и перельете ее въ кубъ, то уровень воды въ кубѣ будетъ стоять на трехъ четвертяхъ его высоты.

Такъ какъ оба тѣла имѣютъ одну и ту же высоту, то разница въ ихъ объемахъ зависитъ отъ разницы въ площади ихъ основаній Такимъ образомъ дѣлается очевиднымъ, что круговое основаніе цилиндра составляетъ три четверти квадратнаго основанія куба.

25. Какая длина стороны вашего куба?

26. Какая длина діаметра основанія вашего цилиндра?

27. Какая площадь основанія вашего куба?

28. Какая площадь основанія вашего цилиндра?

29. Какой объемъ вашего куба?

30. Какой объемъ вашего цилиндра?

31. Какая площадь прямоугольника, который былъ изогнутъ для образованія кривой поверхности вашего цилиндра?

32. Какая же тогда площадь кривой (или боковой поверхности вашего цилиндра)?

33. Какъ вы найдете боковую поверхность цилиндра, даннаго вамъ въ готовомъ видѣ?

34. Если вамъ извѣстна площадь основанія цилиндра и его высота, какъ вы найдете его объемъ?

35. Какой объемъ цилиндра, высота котораго 8 см, а площадь основанія 20 кв. см.?

36. Какой объемъ самаго большого цилиндра, который можетъ помѣститься въ кубическомъ ящикѣ глубиною 6 д.?

37. Сколько квадратныхъ дюймовъ заключается въ полной поверхности цилиндра, боковая поверхность котораго образовалась изъ прямоугольника въ 5 д. длиною и 4 д. шириною и основанія котораго есть круги.

38. Какой объемъ этого же цилиндра?

Длина окружности приблизительно равна тремъ (точнѣе $3^1/_7$) діаметрамъ.

Площадь круга приблизительно равна тремъ четвертямъ площади квадрата, на томъ же діаметрѣ.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведенію окружности основанія на разстояніе между основаніями, считая по боковой поверхности.

Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

ГЛАВА XVI.

Конусъ.

1. На рисункѣ 137 изображена гора Фу-джи въ Японіи. Вотъ вамъ другой примѣръ круглаго тѣла. Это—*конусъ* (слово „конусъ" значитъ „верхушка, остроконечіе", т.-е. верхушка горы). Конусъ имѣетъ двѣ поверхности, одну плоскую, другую кривую. Плоская поверхность—основаніе конуса, она ограничена кривой линіей. Кривая поверхность начинается съ точки, называемой вершиной конуса, и простирается до основанія.

Сдѣлаемъ модель конуса (рис. 138 и 139).

2. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 12 см. × 11 см. (5 дм. × $4^1/_2$ д.).

Прежде всего начертите уголъ ACB въ 160°.

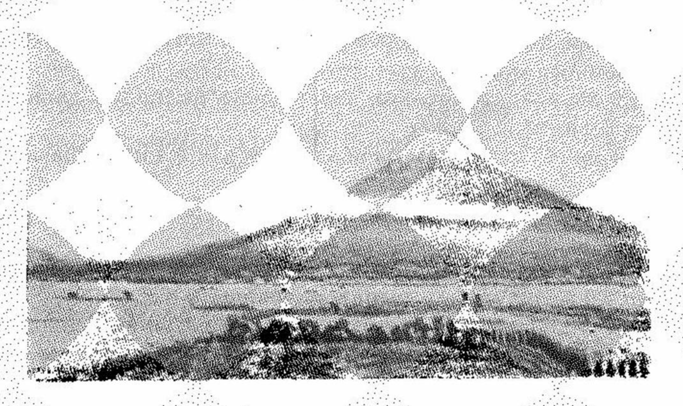


Рис. 137. Гора Фу-джи въ Японіи.

Затѣмъ изъ вершины C, какъ изъ центра, радіусомъ въ 5 см. 6 мм. (или $2^1/_4$ д.) начертите дугу AB, заключающуюся между сторонами угла.

Потомъ изъ L, какъ изъ центра, радіусомъ въ 25 миллиметровъ (или 1 д.) начертите кругъ, едва касающійся дуги.

На дугѣ сдѣлайте отвороты зубчиками, стараясь не оторвать круга. Отвороты приклеиваются къ наружной сторонѣ основанія и

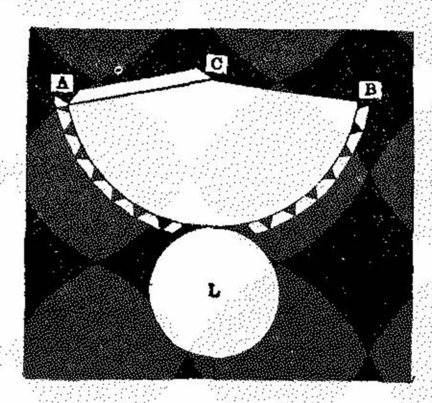


Рис. 138.

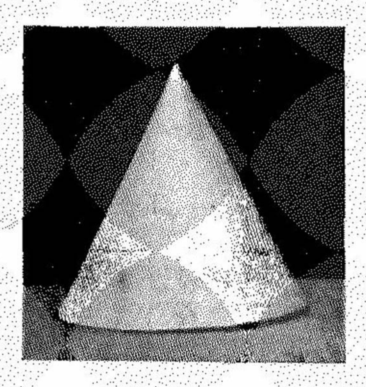


Рис. 139.

ребро для крѣпости еще покрывается узкой полоской бумаги или вторымъ кругомъ, какъ это было сказано, когда объяснялось, какъ склеить цилиндръ.

3. Плоская фигура, которую вы сгибали, чтобы образовать кривую поверхность конуса, называется *секторомъ*; секторъ—часть круга, ограниченная двумя радіусами и дугой.

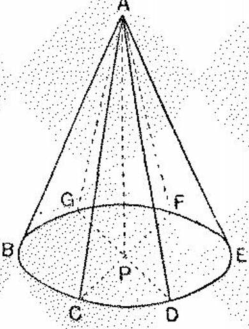


Рис. 140.

Высота конуса — перпендикулярное разстояніе отъ вершины конуса до его основанія (какъ AP). У конуса, который вы сдѣлали, эта линія проходитъ черезъ центръ основанія.

Косая высота конуса есть разстояніе отъ вершины до окружности основанія, какъ AB, AC, AD и т. д.; она измѣряется по прямой линіи, — это единственно возможный случай проводить прямыя линіи по кривой поверхности конуса, въ чемъ вы можете убѣдиться, прикладывая ребро линейки къ его поверхности. У вашего конуса всѣ косыя высоты равны.

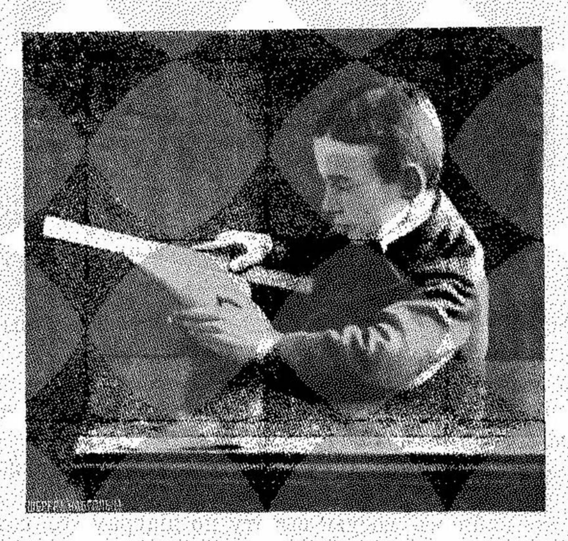


Рис. 141. Опредѣленіе косой высоты конуса.

На рисункѣ горы „Облачная шапка" мы видимъ только часть конуса, называемую усѣченнымъ конусомъ. Усѣченный конусъ—это та часть конуса, которая лежитъ между

основаніемъ и плоскостью, разсѣкающей конусъ параллельно основанію.

Отрѣзанная часть выше плоскости будетъ маленькій конусъ.

4. **Площадь кривой (боковой) поверхности** вашего *конуса* равняется длинѣ окружности основанія, умноженной на половину косой высоты.

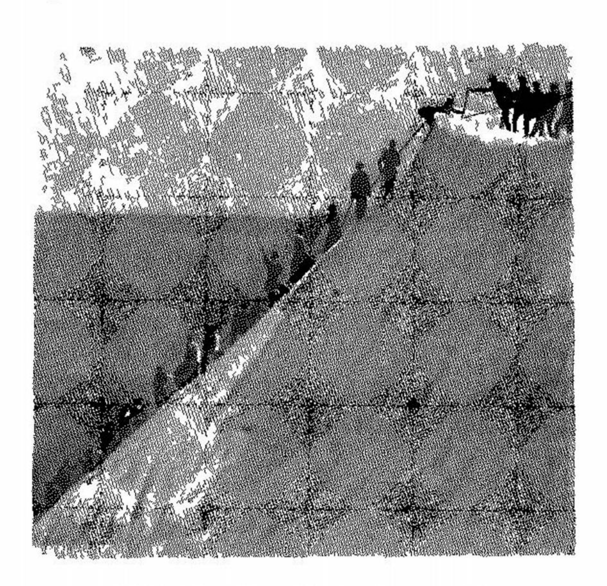


Рис 142 Гора «Облачная шапка».

Прежде всего вы должны найти длину окружности вычисленіемъ и провѣрить отвѣтъ измѣреніемъ:

1. Какая длина діаметра основанія?

2. На что вы умножите діаметръ, чтобы найти длину окружности?

3 Какова же длина окружности?

4. Теперь измѣрьте длину окружности лентой или узкой полоской бумаги и посмотрите, сходны ли оба результата.

Затѣмъ мы найдемъ косую высоту по діаграммѣ, которая намъ служила для изготовленія конуса, и провѣримъ отвѣтъ измѣреніемъ.

5 Какая линія діаграммы соотвѣтствуетъ косой высотѣ?

6 Какая ея длина?

Теперь смѣряйте косую высоту по поверхности конуса, начиная отъ вершины. Запомните, что вы хотите смѣрять *прямую* линію, несмотря на кривую поверхность, а единственно возможныя прямыя

линии на боковой поверхности конуса—это тѣ, которыя проходятъ черезъ вершину или пройдутъ черезъ нея, если ихъ продолжить.

Наконецъ, вы можете найти площадь боковой поверхности, умножая длину окружности на половину косой высоты. Отвѣтъ будетъ около 44 кв сантим. (или около 7 кв. дюймовъ).

5. **Объемъ конуса** равенъ одной трети объема цилиндра, основаніе и высота котораго равны основанію и высотѣ конуса

Вы можете провѣрить это на опытѣ. Сдѣлайте другой конусъ, удаливши основаніе, и возьмите цилиндръ, который вы употребляли для измѣреній

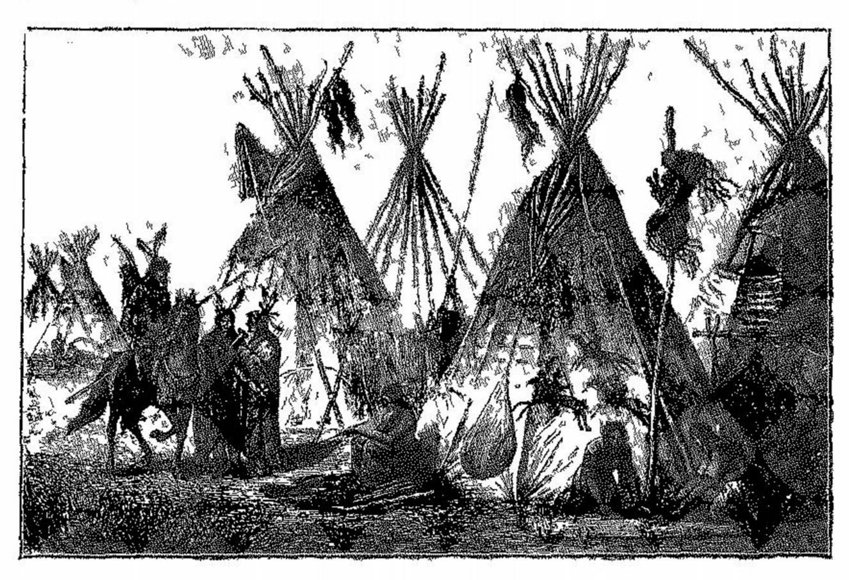


Рис. 143. Жилища индѣйцевъ.

Прежде всего приложите основанія обоихъ тѣлъ другъ къ другу и убѣдитесь, что они равны. Потомъ при помощи линейки, положенной на ихъ вершины, убѣдитесь, что ихъ высоты также равны Потомъ сравните объемъ обоихъ тѣлъ, наполняя ихъ пескомъ, водою и т п Вы найдете, что надо взять три раза содержимое конуса, чтобы наполнить цилиндръ

7 Такъ какъ объемъ цилиндра равенъ площади его основанія, умноженнаго на высоту, то какой же объемъ вашего конуса?

8 Жилище индѣйца—конусообразная палатка съ діаметромъ и высотой приблизительно по 15 футовъ. Длина шестовъ отъ вершины до нижняго края равна приблизительно 17 футамъ

Сколько квадратныхъ футовъ матеріи нужно для того, чтобы покрыть эту палатку?

9. Какой объемъ конуса, высота котораго 6 см., а площадь его основанія 20 кв. см.?

10. Какой объемъ конуса, высота котораго 12 дюймовъ, а діаметръ основанія 8 дюймовъ.

11. Если конусъ и цилиндръ имѣютъ одинаковыя основанія, но конусъ въ три раза выше цилиндра, въ какомъ отношеніи будутъ ихъ объемы?

Площадь боковой поверхности конуса равна половинѣ произведенія ея окружности на косую высоту.

Боковая поверхность

$$\text{конуса} = \frac{\text{окружности основанія} \times \text{косую высоту}}{2}$$

$$= \frac{\text{окружности основанія}}{2} \times \text{косую высоту}$$

$$= \text{окружности основанія} \times \frac{\text{косую высоту}}{2}$$

Объемъ конуса равенъ одной трети произведенія площади его основанія на высоту.

$$\text{Объемъ конуса} = \frac{\text{основанію} \times \text{высоту}}{3} = \frac{\text{основанію}}{3} \times \text{высоту} = \text{основанію} \times \frac{\text{высоту}}{3}.$$

ГЛАВА XVII.

Тѣла вращенія. — Шаръ.

1 Какъ пламя на концѣ палки, которую быстро вертятъ, кажется огненнымъ кругомъ, точно такъ же разныя плоскія фигуры, если ихъ вертѣть около одной оси, кажутся тѣлами.

Такъ, въ уравнителѣ Уайта, употребляемомъ въ паровыхъ машинахъ, треугольникъ, образованный двумя прутьями уравнителя, на которыхъ висятъ шары, кажется конусомъ, когда машина работаетъ, и шестиугольникъ EFMNLK кажется двумя усѣченными конусами, сложенными другъ съ другомъ своими основаніями.

Вслѣдствіе этого нѣкоторыя тѣла называются „тѣлами вращенія“, такъ какъ можно себѣ представить, что они обра-

зовались или возникли черезъ вращенiе плоскихъ фигуръ. Есть три главныхъ тѣла вращенiя, изъ которыхъ два—цилиндръ и конусъ—вы уже изучили.

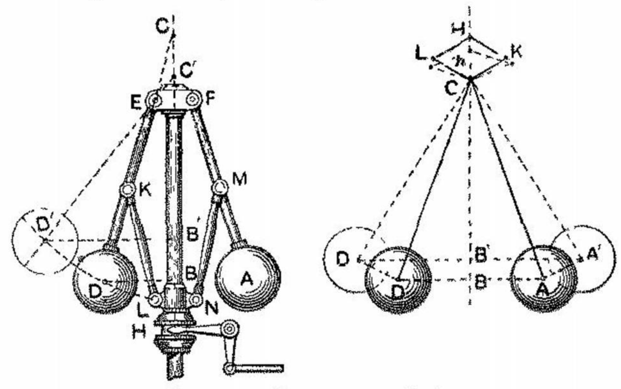


Рис. 144. Уравнитель Уайта.

Цилиндръ получается отъ вращенiя прямоугольника около одной изъ его сторонъ.

Такимъ образомъ прямоугольникъ ABCD, вращаемый на CD, какъ на оси, образуетъ цилиндръ, высота котораго есть CD, а основанiе есть кругъ съ радiусомъ, равнымъ BD.

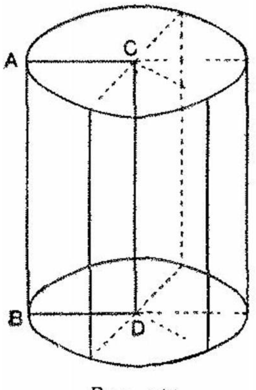


Рис. 145.

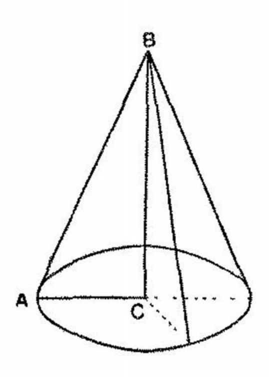


Рис. 146.

Конусъ происходитъ отъ вращенiя прямоугольнаго треугольника около одного изъ катетовъ. Такимъ образомъ треугольникъ ACB, вращаемый на BC, какъ на оси, образуетъ конусъ, высота котораго есть BC, косая высота—AB, а основанiе есть кругъ, радiусъ котораго равенъ CA.

Теперь мы разсмотримъ третье тѣло вращенія. Если вы пустите монету вертѣться на ребрѣ, вамъ покажется, что вертится шаръ. Монета—кругъ, который вертится около одного изъ своихъ діаметровъ. Если бы вы стали вертѣть только полкруга около діаметра, то вамъ тоже казалось бы, что вертится шаръ.

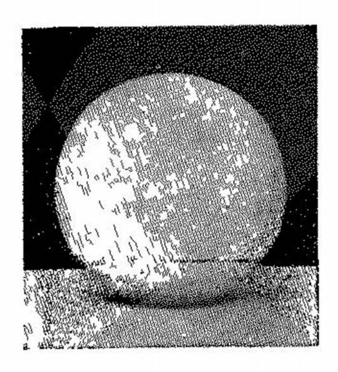


Рис. 147.

2. Это тѣло, т е *шаръ*, называется еще *сферой*.

Сфера слово греческое и означаетъ „шаръ, мячъ, клубокъ".

Поверхность шара кривая, и всѣ части ея на одинаковомъ разстояніи отъ одной точки внутри шара, которая называется *центръ*.

Радіусъ шара—это прямая линія, проведенная отъ центра до поверхности.

Діаметръ шара—прямая линія, проведенная черезъ центръ и ограниченная съ обоихъ концовъ поверхностью шара. Такимъ образомъ діаметръ равенъ двумъ радіусамъ.

Всѣ радіусы шара равны между собою; равны также и діаметры.

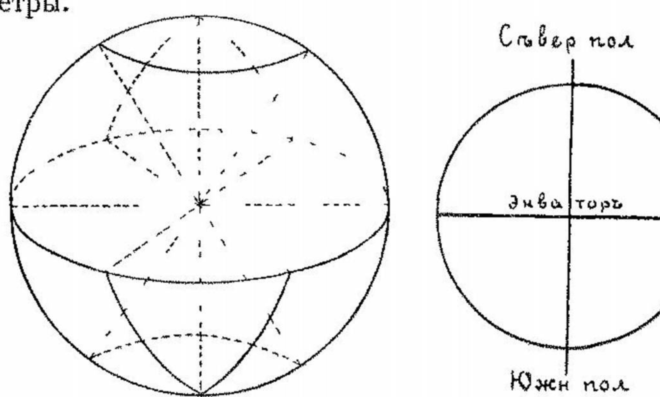


Рис. 148. Рис. 149. Шаръ, полюсы и ось.

Полюсы шара—это концы какого-нибудь изъ его діаметровъ. Поэтому они точки.

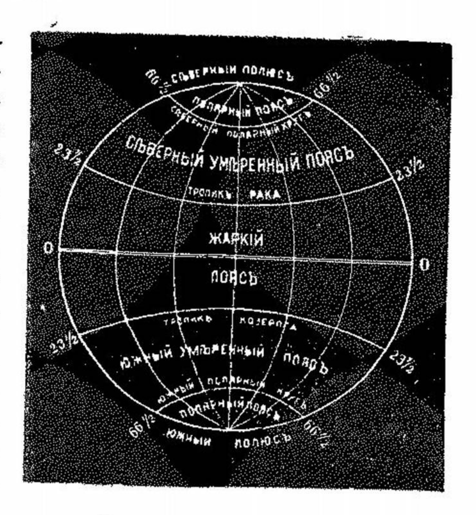


Рис. 150. Экваторъ, параллели и меридіаны.

Слово полюсъ часто употребляется въ геометріи. На латинскомъ языкѣ оно означаетъ „стержень, ось“. Такимъ образомъ полюсы земли—это двѣ точки на концахъ діаметра, на которомъ, какъ на оси, вращается земля.

По поверхности шара нельзя провести ни одной прямой линіи, въ чемъ вы легко можете убѣдиться, пробуя приложить ребро линейки къ его поверхности. Зато могутъ быть проведены окружности и притомъ окружности разныхъ размѣровъ—большія и малыя.

Наибольшій кругъ имѣетъ тотъ же радіусъ и тотъ же діаметръ, какъ и самъ шаръ. Это самый большой кругъ, окружность котораго можетъ быть проведена по поверхности шара.

Экваторъ и меридіаны на глобусѣ—это примѣры наибольшихъ круговъ, при этомъ меридіаны будутъ только полуокружности.

Малый кругъ, проведенный по поверхности шара, есть кругъ, радіусъ котораго меньше, чѣмъ радіусъ шара.

Параллельные круги на глобусѣ—вотъ примѣры малыхъ круговъ на землѣ.

Каждый большой кругъ дѣлитъ шаръ на двѣ равныя части, называемыя полушаріями, или полусферами. Полушаріе—это обыкновенная форма въ зданіяхъ и постройкахъ.

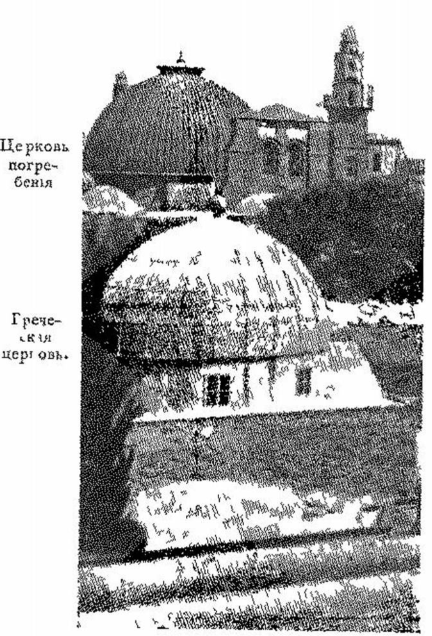


Рис. 151. Церкви въ Іерусалимѣ.

На рисункѣ 151 вы можете видѣть два купола въ видѣ полушарій.

На куполѣ греческой церкви сколько видно большихъ круговъ?

И сколько малыхъ круговъ?

Какого рода тотъ кругъ, который ограничиваетъ основаніе этого купола?

Какого рода круги видны на куполѣ церкви Погребенія?

Зоны—это части поверхности шара, ограниченныя окружностями параллельныхъ круговъ.

Слово „зона" происходитъ отъ греческаго слова, означающаго „поясъ".

Окружности, которыя ограничиваютъ зону, называются *основаніями* или *базами* зоны.

Жаркій и умѣренный поясы на земномъ шарѣ—примѣры зонъ съ двумя основаніями. Основанія жаркаго пояса—тропикъ рака и тропикъ козерога. Полярныя пояса—вотъ примѣры зонъ съ однимъ основаніемъ. Основаніе сѣвернаго полярнаго пояса—сѣверный полярный кругъ (рис. 150); но вы можете представить себѣ, что на сѣверномъ полюсѣ проведено другое основаніе внѣ земли.

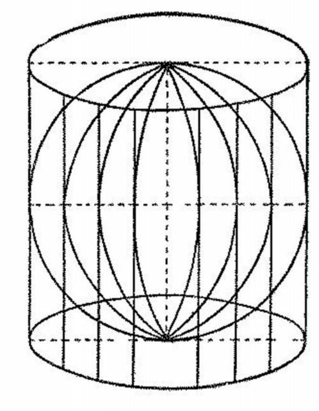


Рис. 152.

3. **Площадь поверхности шара** вполнѣ точно равняется четыремъ большимъ кругамъ.

Такимъ образомъ, если діаметръ шара есть 5 см., площадь большого круга будетъ имѣть около $19^{1}/_{2}$ кв. см., а площадь шара около 78 кв. см.

Поверхность шара тоже вполнѣ точно равняется боковой (кривой) поверхности цилиндра, въ которой шаръ какъ разъ помѣщается.

Эта истина имѣетъ важное примѣненіе при черченіи географическихъ картъ, когда кривая поверхность земли представляется плоской, а параллели и меридіаны—прямыми линіями.

Карта вычерчивается какъ будто на боковой поверхности цилиндра, который потомъ развертывается такъ, что образуетъ прямоугольникъ. Такимъ образомъ производится процессъ обратный тому, посредствомъ котораго вы дѣлали вашъ цилиндръ.

Такая карта называется картой, начерченной въ Меркаторской проэкціи.

4. **Объемъ шара**. Если вы примите, что окружность въ три раза длиннѣе, чѣмъ ея діаметръ, то объемъ шара можетъ быть полученъ, если умножить діаметръ на самого себя, потомъ еще разъ на себя, произведеніе же раздѣлить на 2.

Такимъ образомъ, если діаметръ шара есть 5 см., то объемъ шара будетъ $\frac{5\times5\times5}{2}$, или $62^1/_2$ куб. см.

Найдите площади поверхностей слѣдующихъ шаровъ:

1. Діаметръ 4 см.
2. „ 6 см.
3. „ 8 дюйм
4. Радіусъ 4 см.
5. „ 6 дюйм.

Найдите объемъ слѣдующихъ шаровъ:

6. Діаметръ 2 см.
7. „ 3 см.
8. „ 4 дюйм
9. Радіусъ 1 см.
10. „ 2 дюйм.

Площадь поверхности шара есть учетверенная поверхность большого круга.

Объемъ шара $= \frac{\textit{діаметръ} \times \textit{діаметръ} \times \textit{діаметръ}}{2}$.

ГЛАВА XVIII.

Тѣла для построенія.

Всѣ тѣла, ограниченныя плоскостями, называются „многогранники“.

Тѣла, которыя мы будемъ разсматривать въ этой главѣ, нѣсколько труднѣе для построенія и для изученія, чѣмъ тѣ, что мы разсматривали раньше. Многія изъ нихъ состоятъ изъ соединенія частей тѣхъ тѣлъ, которыя вы уже дѣлали.

Многія похожи на кристаллическія формы, встрѣчающіяся въ природѣ.

Три изъ нихъ правильные многогранники, т.-е. ихъ грани—равные правильные многоугольники и ихъ двугранные углы равны.

Существуютъ только пять правильныхъ многогранниковъ, изъ которыхъ два уже сдѣланы вами—кубъ и равносторонняя треугольная пирамида.

Когда вы построете какое-нибудь тѣло, тщательно разсмотрите его, постарайтесь отвѣтить на слѣдующіе вопросы:

1. Не есть ли это тѣло соединеніе болѣе мелкихъ тѣлъ? Если да, то какихъ?
2. Не часть ли оно другого тѣла? Если да, то какого тѣла? Какъ оно раздѣлено?
3. Сколько граней у этого тѣла?
4. Опишите видъ граней, если онѣ различнаго вида, найдите число граней каждаго вида.
5. Сколько реберъ у этого тѣла?
6. Какой длины ребра?
7. Сколько тѣлесныхъ угловъ у тѣла?
8. Сколько граней образуютъ одинъ тѣлесный уголъ?
9. Сколько у тѣла двугранныхъ угловъ?
10. Какой величины двугранные углы?
11. Сколько линейныхъ угловъ на поверхности тѣла?
12. Какой величины линейные углы?
13. Какой объемъ тѣла?

Объемъ долженъ быть найденъ посредствомъ опыта. Раньше чѣмъ приклеивать послѣднюю грань, наполните тѣло пескомъ и пересыпьте содержимое въ кубъ, гдѣ легко уже сдѣлать измѣренія.

Скошенная треугольная призма. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 16 сантиметровъ×15 сантиметровъ ($6^1/_2$ д.×6 д.).

Построеніе можно видѣть на рис. 153, 154 и 155.

A, B и C—равные квадраты со стороною въ 5 см. (2 д.).

Отъ верхнихъ угловъ квадрата B проводятся линіи къ среднимъ точкамъ внѣшнихъ реберъ квадратовъ A и C.

На верхней сторонѣ квадрата B строится равнобедренный треугольникъ. Его боковыя стороны равны только-что проведеннымъ линіямъ.

L—равносторонній треугольникъ, построенный на нижней сторонѣ квадрата B.

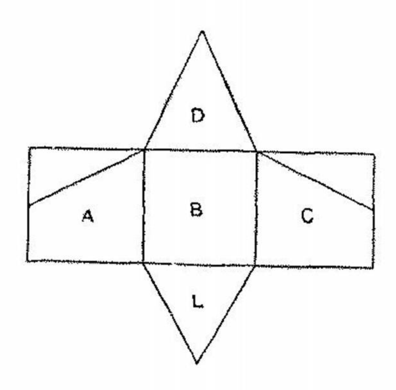


Рис 153.

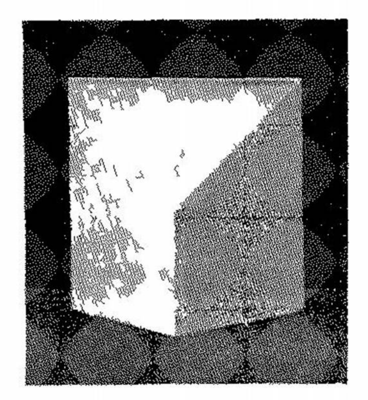


Рис 154

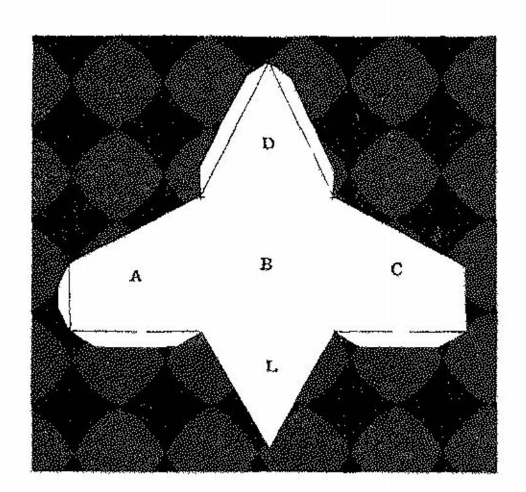


Рис 155.
Скошенная треугольная призма

Косая четыреугольная призма. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 20 сантиметровъ 5 миллим × 15 сантиметровъ ($8^1/_2$ д × 6 д).

Поверхность состоитъ изъ четырехъ равныхъ квадратовъ со сторонами по 5 см. (2 д.) и двухъ равныхъ ромбовъ съ углами въ 60^0 и 120^0 и сторонами по 5 см. (2 д.) (рис. 156 и 157).

Ромбическая призма. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 20 см. × 14 см. (8 д. × 6 д.)

Поверхность состоитъ изъ равныхъ ромбовъ съ углами въ 60° и 120° и сторонами по 5 сантиметровъ (2 д.) (рис 158 и 159).

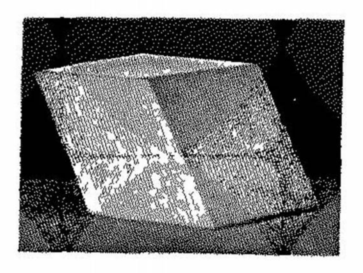


Рис 156.

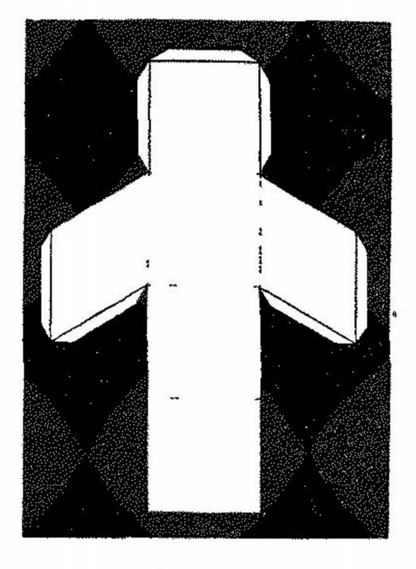


Рис. 157
Косая четыреугольная призма

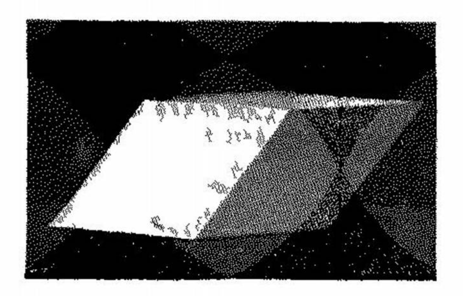


Рис 158

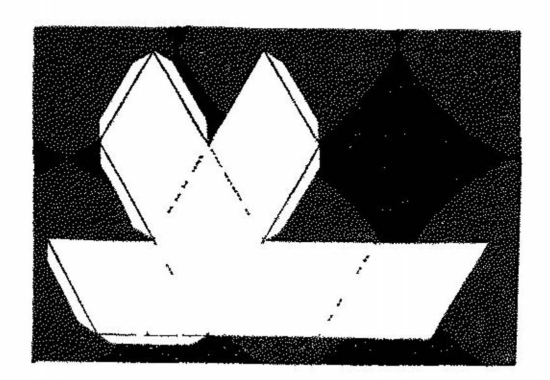


Рис. 159.
Ромбическая призма

Эти двѣ призмы сравните съ кубомъ (рис 16)

1 Число ихъ реберъ
2. Длину сторонъ

3. Число граней
4. Площади ихъ поверхности
5. Ихъ объемы.

Правильный восьмигранникъ (октаэдръ). Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 18 сантиметровъ $\times$ 14 сантиметровъ ($7^1/_2$ д. $\times$ 6 д).

ABC и DEF—равносторонніе треугольники со сторонами по 10 см (2 д.), D—средняя точка AC. Каждый изъ этихъ двухъ тре

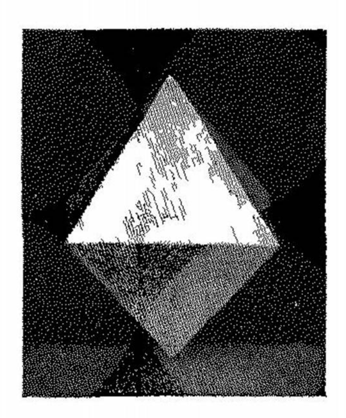


Рис. 160.

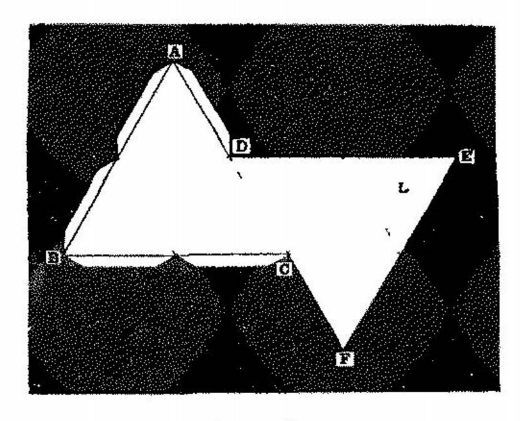


Рис 161
Правильный восьмигранникъ

угольниковъ дѣлится на четыре равностороннихъ треугольника съ помощью соединенія срединныхъ точекъ сторонъ.

Правильный двадцатигранникъ (икосаэдръ). Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 17 сантиметровъ $\times$ 8 сантиметровъ ($7^1/_2$ д. $\times$ 3 д.).

Построеніе можно видѣть на рис. 162, 163, 164

ABCD—параллелограммъ съ углами въ 60° и 120° и сторонами въ 12 сантиметровъ 5 миллиметровъ и 7 см. 5 мм (или 5 д. и 3 д.).

Каждая сторона дѣлится на равныя части по 2 см 5 мм (1 д.) каждая Потомъ точки соединяются параллельными линіями въ трехъ на

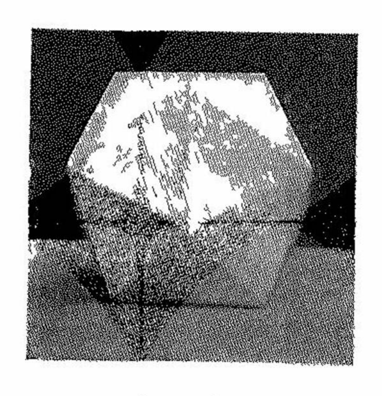


Рис 162

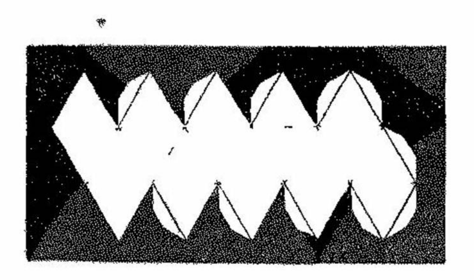


Рис 163

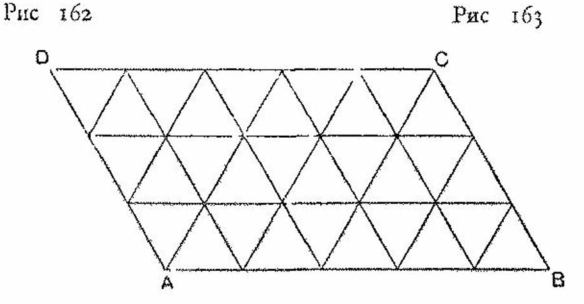


Рис 164.
Правильный двадцатигранникъ.

правленіяхъ, какъ видно на рисункѣ, такимъ образомъ параллелограммъ раздѣляется на тридцать равностороннихъ треугольниковъ, изъ которыхъ десять, имѣющихъ одну свою сторону по верхней и нижней сторонѣ параллелограмма, впослѣдствіи удаляются настолько, чтобы изъ нихъ сдѣлались отвороты у оставшихся треугольниковъ.

Правильный двѣнадцатигранникъ (додекаэдръ). Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 17 см $\times$19 см (7 д$\times$4 д).

Построеніе видно на рис 165, 166, 167. ABCDE есть правильный пятиугольникъ, каждый уголъ котораго имѣетъ 108°, а каждая сторона по 5 см (2 д)

Если провести пять діагоналей AC, AD и т д., то внутри перваго пятиугольника образуется другой меньшій Проведите всѣ діагона-

ли въ этомъ маленькомъ пятиугольникѣ и продолжите ихъ до встрѣчи со сторонами большого, и получите такимъ образомъ еще пять малыхъ пятиугольниковъ.

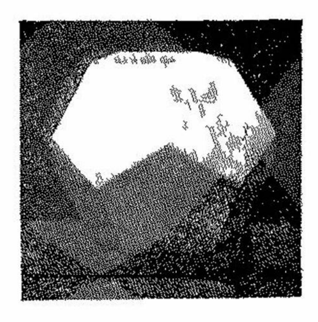


Рис 165

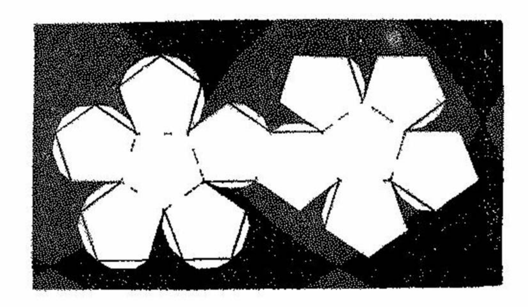


Рис. 166

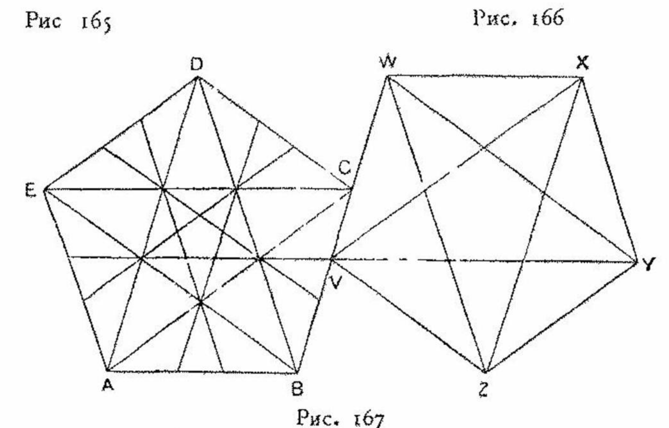


Рис. 167
Правильный двѣнадцатигранникъ

Послѣ этого строится правильный пятиугольникъ VWXYZ, причемъ V будетъ вершиной маленькаго пятиугольника, а VW—продолженіемъ одной изъ сторонъ и должно быть равно BC. Діагонали проводятся какъ раньше

Пятиугольная призма (рис. 168 и 169) Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 13 сантиметровъ $\times$ 12 сантиметровъ ($5^1/_4$ д $\times$ 5 д.)

Грани состоятъ изъ прямоугольниковъ и правильнаго пятиугольника.

У прямоугольника стороны въ 5 см и 2 см. 5 мм. (2 д и 1 д.)

У пятиугольника стороны въ 2 см 5 мм. (1 д.) и углы въ 108°.

Кристаллъ шпинели *) (рис. 170, 171 и 172) Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 18 см $\times$ 16 см ($7^1/_2$ д $\times$ $6^1/_2$ д).

*) Шпинель—минералъ

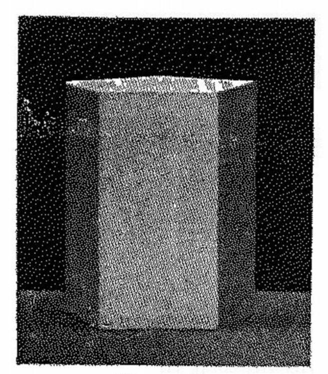


Рис 168

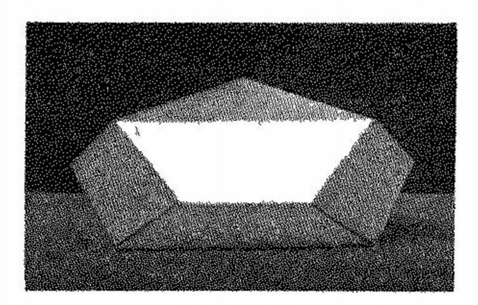


Рис. 169

Пятиугольная призма

Рис. 170

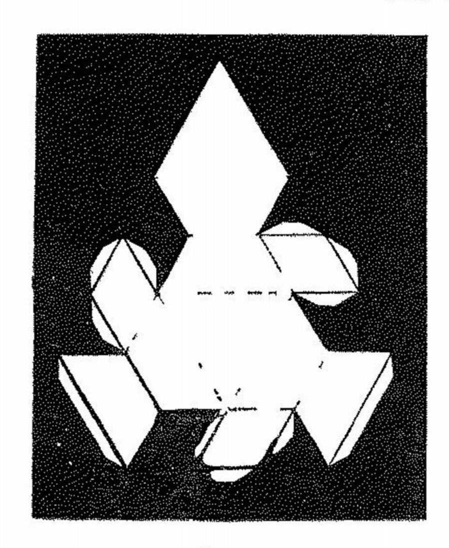


Рис 171

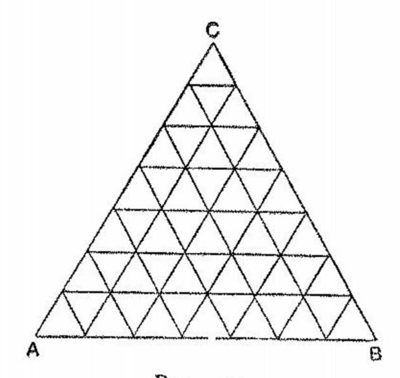


Рис. 172.

Кристаллъ шпинели.

АВС—равносторонній треугольникъ со сторонами въ 17 см. 5 мм. (7 д.). Каждая сторона дѣлится на семь равныхъ частей по 2 см. 5 мм. (1 д) и проводятся линіи, параллельныя всѣмъ сторонамъ треугольника и соединяющія точки дѣленія; такимъ образомъ образуются маленькіе правильные треугольники.

Линіи, которыя видны на діаграммѣ, лежатъ по тѣмъ же линіямъ, которыя проведены на особомъ чертежѣ.

Грани состоятъ изъ равностороннихъ треугольниковъ со сторонами въ 5 см. (2 д), ромбовъ съ углами въ 60° и 120° и сторонами въ 2 см. 5 мм. и трапецій съ углами въ 60° и 120° и сторонами въ 5 см и 2 см 5 мм. (2 д и 1 д.).

Эта модель похожа на кристаллъ шпинели

Кристаллъ мѣди. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 12 см. × 8 см (5 д. × 3½ д)

Построеніе видно на чертежахъ 173, 174 и 175.

ABCD есть квадратъ со стороною въ 7 см. 5 мм (3 д)

Каждая сторона дѣлится на три равныя части по 25 мм (1 д) и проводятся линіи, соединяющія углы и другія соотвѣтствующія стороны дѣленія.

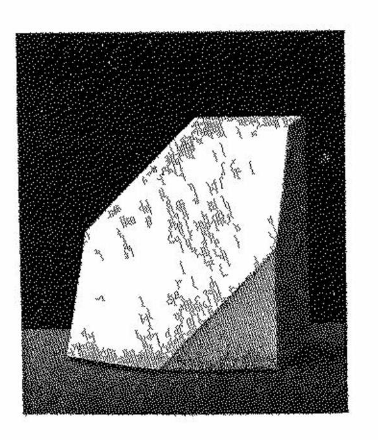
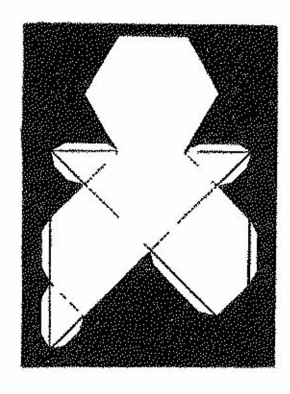


Рис 173



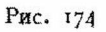


Рис. 174

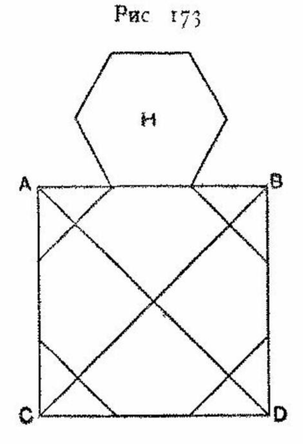


Рис. 175.

Кристаллъ мѣди.

H есть правильный шестиугольникъ, построенный на средней части верхней стороны квадрата.

Эта модель похожа на одну изъ кристаллическихъ формъ мѣди.

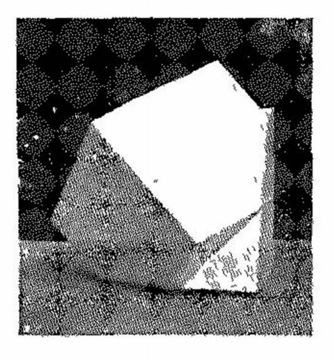


Рис. 176.

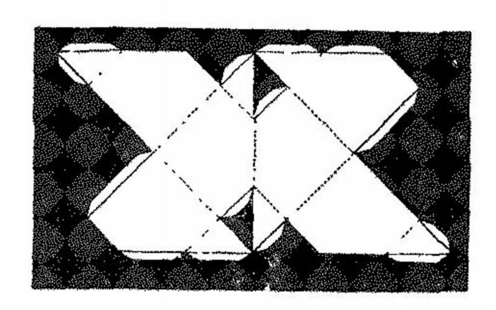


Рис. 177.

Рис. 178.
Двойной кристаллъ кальцита.

Двойной кристаллъ кальцита. Для діаграммы нуженъ кусокъ бумаги въ 16 см. × 8 см. ($6\frac{1}{2}$ д. × $3\frac{1}{2}$ д.).

Построеніе можно видѣть на чертежахъ 176, 177, 178.

ABCD есть прямоугольникъ со сторонами въ 15 см. и 7 см. 5 мм. (6 д. × 3 д.), раздѣленный на два квадрата линіею XY.

Стороны квадратовъ дѣлятся на три равныя части по 25 мм. (1 д.), и проводятся линіи, соединяющія углы и другія соотвѣтствующія точки дѣленія.

Эта модель похожа на кристаллическую форму кальцита или известковаго шпата, называемую „двойникомъ“, такъ какъ она состоитъ изъ двухъ проникающихъ другъ друга кубовъ.

ЧАСТЬ II.

ТОЧКИ, ЛИНІИ, УГЛЫ, МНОГОУГОЛЬНИКИ И КРУГИ.

ПОСТРОЕНІЯ, ИЗМѢРЕНІЯ, ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ И СЪЕМКА.

ГЛАВА XIX.

Точки и линіи.

1. *Расположеніе* точекъ по отношенію другъ къ другу на одной и той же прямой линіи.

1. Сколькими различными способами могутъ быть размѣщены двѣ точки по отношенію другъ къ другу на одной и той же прямой линіи?

Пусть *a* и *в* будутъ двѣ точки.

Во-1-хъ, *a* можетъ быть поставлена раньше *в*. (a b)

Во-2-хъ, *в* можетъ быть поставлена раньше *a*. (b a)

2. Сколькими различными способами могутъ быть размѣщены три точки на одной и той же прямой линіи.

Пусть *a*, *в* и *c* будутъ три точки.

Вы видѣли на предыдущей задачѣ, что двѣ точки *a* и *в* могутъ быть размѣщены двумя различными способами: (a b) (b a)

Взявши первую группу, (a b), замѣтьте, что *c* можетъ быть поставлена между ними тремя различными способами:

c a b — Рис. 179.

a c b — Рис. 180.

a b c — Рис. 181.

Подобно этому во второй группѣ (b a) точка *c* можетъ быть помѣщена тремя способами:

c b a — Рис. 182.

b c a — Рис. 183.

b a c — Рис. 184.

Слѣдовательно, всего возможно шесть различныхъ размѣщеній.

3. Сколькими различными способами можно размѣстить четыре точки на одной прямой?

Возьмите одну изъ группъ въ три точки и помѣщайте четвертую между ними въ различныхъ положеніяхъ; потомъ сдѣлайте то же самое съ каждой изъ остальныхъ группъ по три точки.

Вы найдете, что есть всего двадцать четыре возможныхъ размѣщеній.

4. Сколькими возможными способами можно размѣстить пять точекъ на одной прямой линіи?

Выпишите одинъ только рядъ группъ, но сосчитайте общее число.

5. Найдите число способовъ для 6 точекъ.

Разсматривая способъ, который вы употребляли въ предыдущихъ задачахъ, мы можемъ составить правило, которое можно употреблять для вычисленія числа всѣхъ группъ, которыя можетъ образовать какое-нибудь число точекъ.

2	точки даютъ	2	группы	=	1×2
3	„ „	6	„	=	$1 \times 2 \times 3$
4	„ „	24	„	=	$1 \times 2 \times 3 \times 4$

Слѣдовательно, чтобы сосчитать общее число группъ для какого-нибудь числа точекъ, перемножьте между собою числа отъ 1 до числа точекъ включительно.

6. Найти вычисленіемъ общее число перестановокъ 7 точекъ на одной прямой линіи.

7. Какіе ряды чиселъ, если ихъ перемножить другъ на друга, дадутъ общее число группъ для 10 точекъ?

2. Точки, опредѣляемыя пересѣченіемъ прямыхъ линій.

1. Во сколькихъ точкахъ могутъ пересѣчься двѣ прямыя линіи?

Двѣ прямыя линіи могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

2. Во сколькихъ точкахъ могутъ пересѣчься три прямыя линіи?

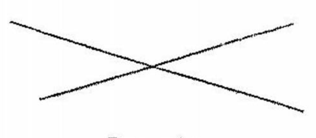


Рис. 185.

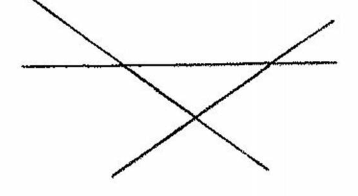


Рис. 186.

Двѣ прямыя линіи могутъ пересѣчься въ одной точкѣ, но третья прямая пересѣкаетъ двѣ другія каждую въ одной точкѣ; слѣдовательно, три прямыя линіи имѣютъ три точки взаимнаго пересѣченія.

3. Сообразно съ предыдущей задачей, 3 есть *наибольшее* число

точекъ взаимнаго пересѣченія трехъ прямыхъ линій. Можете ли вы начертить три прямыя линіи такъ, чтобы онѣ пересѣкались только въ двухъ точкахъ?

4. Можете ли вы начертить ихъ такъ, чтобы онѣ пересѣкались только въ одной точкѣ?

5. Можете ли вы начертить ихъ такъ, чтобы онѣ не пересѣкались совсѣмъ?

6. Какое наибольшее число точекъ взаимнаго пересѣченія четырехъ прямыхъ? Сдѣлайте чертежъ.

7. Пяти линій? Сдѣлайте чертежъ. (Отв. 10 точекъ.)

8. Шести линій? Сдѣлайте чертежъ. (Отв. 15 точекъ.)

Изъ предыдущихъ задачъ вы можете вывести правило, по которому вы можете опредѣлять наибольшее число точекъ взаимнаго пересѣченія нѣсколькихъ прямыхъ линій.

2.	прям.	линіи	могутъ	имѣть	1	точку	пересѣченія	$=1$
3.	„	„	„	„	3	точки	„	$=1+2$
4.	„	„	„	„	6	точекъ	„	$=1+2+3$
5.	„	„	„	„	10	„	„	$=1+2+3+4$
6.	„	„	„	„	15	„	„	$=1+2+3+4+5$

*Слѣдовательно, чтобы опредѣлить наибольшее возможное число точекъ взаимнаго пересѣченія нѣкотораго числа прямыхъ линій, надо сложить вмѣстѣ рядъ чиселъ отъ 1 до числа линій безъ одной *).*

9. Найдите вычисленіемъ наибольшее возможное число точекъ пересѣченія между семью прямыми линіями.

10. Опредѣлите то же самое для восьми прямыхъ.

11. Если наибольшее возможное число точекъ пересѣченія между пятью прямыми есть 10, какое будетъ число точекъ, если предположить, что двѣ изъ этихъ линій параллельны? Сдѣлать чертежъ.

3. Раздѣлить группу точекъ на двѣ группы разныхъ чиселъ.

1. Сколькими способами можно раздѣлить двѣ точки на двѣ группы? Отв. однимъ способомъ: 1 — 1.

2. Три точки? Отв. однимъ способомъ: 1 — 2.

3. Четыре точки? Отв. двумя способами: 1 — 3, 2 — 2.

4. Пять точекъ? Отв. двумя способами: 1 — 4, 2 — 3.

---

*) Еще болѣе короткій способъ высчитать даетъ алгебра; именно: надо умножить число линій на то же число безъ единицы и произведеніе раздѣлить на 2. Такимъ образомъ 10 линій даютъ $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ точекъ пересѣченія.

5. Шесть точекъ?
6. Семь точекъ?
7. Восемь точекъ?
8. Девять точекъ?

По полученнымъ результатамъ можно составить слѣдующее правило:

Чтобы найти число способовъ, которымъ группу точекъ можно раздѣлить на двѣ группы, раздѣлите на 2 число точекъ, если это четное число, или число точекъ безъ одной, если это число нечетное.

9. Опредѣлите число способовъ, которыми 30 точекъ могутъ быть раздѣлены на двѣ группы.

10. Опредѣлите то же самое для 35 точекъ.

11. Для 48 точекъ.

12. Для 27 точекъ.

Въ этихъ задачахъ вы можете замѣтить, что вы не ставите вопроса о томъ, которая изъ двухъ группъ содержитъ какую-нибудь намѣченную точку. Такимъ образомъ при трехъ точкахъ *a*, *в* и *c* группы *a—вс*, *в—ас* и *с—ав* всѣ отвѣчаютъ главному смыслу раздѣленія.

4. Провести наибольшее число прямыхъ линій между точками.

1. Сколько можно провести прямыхъ линій между двумя точками?

Пусть *a* и *в* будутъ точки.

Между *a* и *в* можно провести прямую линію и только одну. Прямая линія отъ *a* до *в* есть та же самая, какъ и отъ *в* до *a*.

2. Сколько прямыхъ линій можно провести между тремя точками?

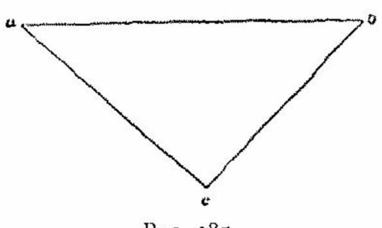


Рис. 187.

Пусть *a*, *в* и *c* будутъ точки.

Между *a* и *в* можно провести одну прямую; потомъ точка *c* можетъ быть соединена съ каждой изъ другихъ двухъ; слѣдовательно, между 3 точками можно провести 3 прямыхъ линіи.

3. Согласно съ предыдущей задачей 3 есть *наибольшее* число прямыхъ линій, которыя можно провести между тремя точками. Можете ли вы размѣстить три точки такъ, чтобы между ними нельзя было провести трехъ прямыхъ линій?

4. Какое наибольшее число прямыхъ можно провести между четырьмя точками? Сдѣлайте чертежъ для трехъ точекъ и потомъ поступайте, какъ во второмъ вопросѣ.

5. Найдите посредствомъ чертежа наибольшее число прямыхъ для пяти точекъ.

6. Сдѣлайте то же самое для шести точекъ.

Вы можете замѣтить, что въ группѣ точекъ, напримѣръ, шести, прямая линія можетъ быть проведена отъ каждой изъ шести къ каждой изъ остальныхъ пяти; такимъ образомъ получается тридцать линій; но тридцать нужно раздѣлить на 2, чтобы не пришлось считать каждую линію дважды. Такъ что пятнадцать есть наибольшее возможное число различныхъ прямыхъ, которыя можно провести между шестью точками.

Это можно выразить въ видѣ правила:

Для того, чтобы найти наибольшее возможное число прямыхъ линій, которыя можно провести между извѣстнымъ числомъ точекъ, умножьте число точекъ на то же число безъ единицы и произведеніе раздѣлите на 2.

7. Найдите вычисленіемъ наибольшее возможное число прямыхъ линій, которыя можно провести между восемью точками.

8. Найдите то же самое для 11 точекъ.

9. Если три точки въ группѣ лежатъ на одной прямой линіи, какъ отъ этого измѣнится общее число линій?

10. Можете ли вы расположить 5 точекъ такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести только одну прямую линію?

11. Можете ли расположить пять точекъ такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести только пять прямыхъ линій?

12. Можете ли вы сдѣлать чертежъ, показывающій, какъ вы должны посадить семь деревьевъ такъ, чтобы образовать шесть рядовъ, по три дерева въ каждомъ ряду?

13. Можете ли вы сдѣлать чертежъ, показывающій, какъ вы должны разсадить 19 деревьевъ такъ, чтобы образовать 9 рядовъ по 5 деревьевъ въ каждомъ? (Намекъ: начертите два треугольника такъ, чтобы они образовали шестиконечную звѣзду).

14. Можете ли вы показать, какъ посадить 9 деревьевъ въ 10 рядахъ по три дерева въ каждомъ ряду? (Намекъ: сначала начертите прямоугольникъ, длина котораго вдвое больше ширины; потомъ продолжите въ противоположныхъ направленіяхъ двѣ короткихъ стороны, каждую на разстояніе равное ея собственной длинѣ.

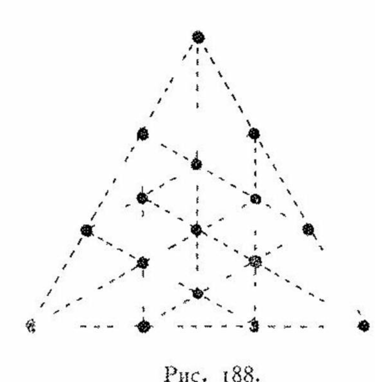


Рис. 188.

15. У одного хозяина была клумба, на которой было посажено 16 цвѣточныхъ луковицъ такъ, какъ показано на рисункѣ 188, т.-е. такъ, что можно было насчитать 12 прямыхъ рядовъ по 4 луковицы въ каждомъ. Но одинъ гость, видя эту клумбу, сказалъ, что тѣ же 16 луковицъ можно разсадить не въ 12, а въ 15 рядовъ; при чемъ въ каждомъ ряду останется то же по 4 луковицы.

Можете ли вы сказать, какъ это сдѣлать?

ГЛАВА XX.

Точки пересѣченія.

1. Найти число точекъ пересѣченія прямыхъ линій, которыя раздѣлены различнымъ образомъ на двѣ группы, при чемъ линіи каждой группы параллельны между собою.

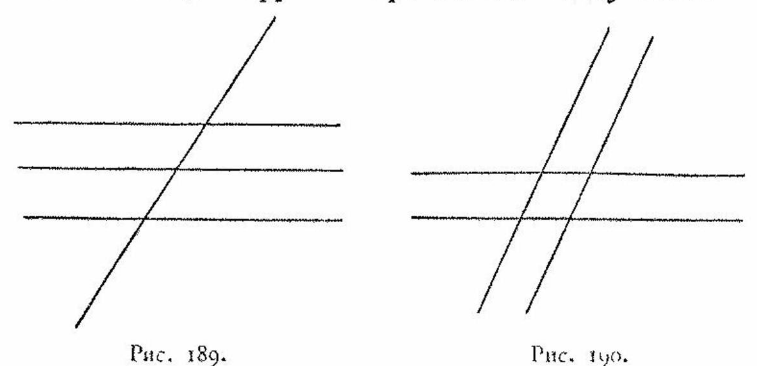


Рис. 189. Рис. 190.

1. Предположимъ, что линій всего четыре

Четыре линіи могутъ быть разбиты на двѣ группы двумя способами (см. стр. 117): 1 линія и 3 линіи, или 2 линіи и 2 линіи. Если въ каждой группѣ линіи между собой будутъ параллельны, то сколько будетъ точекъ пересѣченія?

Вы можете замѣтить, что каждая линія одной группы пересѣкаетъ каждую линію другой группы въ одной точкѣ; но линіи той же самой группы не могутъ пересѣкать другъ друга Почему?

2. Сколько точекъ пересѣченія образуютъ шесть линій, если онѣ раздѣлены на группы, какъ въ предыдущей задачѣ?

3. Пять прямыхъ линій?

4. Восемь прямыхъ линій?

5. Девять прямыхъ линій?

6. Если число линій 12 и число точекъ пересѣченія будетъ 27, то сколько линій въ каждой группѣ?

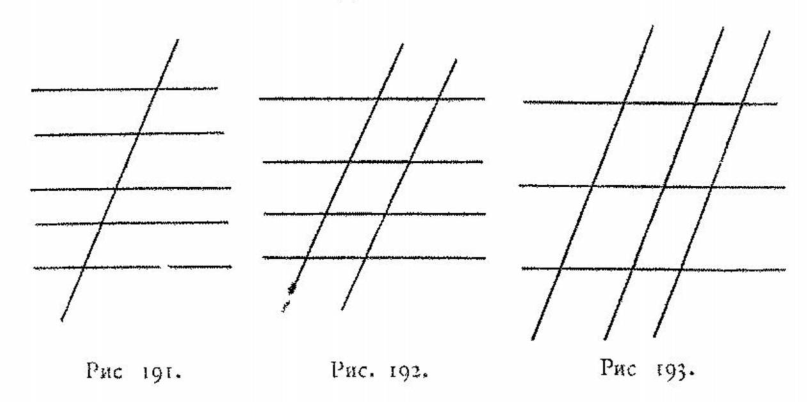


Рис 191. Рис. 192. Рис 193.

7. Могутъ ли 11 линій и 17 линій быть раздѣлены каждая на двѣ группы параллельныхъ линій такъ, чтобы дать 30 точекъ пересѣченія?

8. Какое число линій можетъ быть раздѣлено на пары группъ параллельныхъ линій такъ, чтобы дать 30 точекъ пересѣченія?

9. Пятнадцать линій, которыя можно раздѣлить разнообразными способами на пары группъ параллельныхъ линій, даютъ слѣдующія числа точекъ пересѣченія: 14, 26, 36, 44, 50, 54, 56. Что вы можете замѣтить относительно постепенной разности между этими числами?

10. Вотъ табличка чиселъ точекъ пересѣченія линій, которыя раздѣлены различнымъ образомъ на пары группъ параллельныхъ линій:

3 линіи даютъ 2 точки пересѣченія.
4 „ „ 3 или 4 „
5 „ „ 4 „ 6 „
6 „ „ 5 „ 8 или 9
7 „ „ 6 „ 10 „ 12
8 „ 7 „ 12 „ 15 или 16
9 „ „ 8 „ 14 „ 18 „ 20
10 „ „ 9 „ 16 „ 21 „ 24 или 25

Что вы можете замѣтить относительно возрастанія этого числа точекъ, если вы будете читать столбцы сверху внизъ?

11. Продолжите табличку для 11 и 12 линій, руководствуясь вышеуказанной схемой.

12. Какое наибольшее число линій, которыя можно провести черезъ 4 точки параллельно данной прямой линіи?

13. Можете ли вы расположить 4 точки такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести только одну линію параллельно данной прямой линіи?

14. Можете ли вы расположить 4 точки такъ, чтобы невозможно было провести прямую черезъ какія-нибудь 2 изъ этихъ точекъ параллельно данной прямой?

15. Сколько линій параллельныхъ другъ другу можно провести черезъ одну точку?

16. Можете ли вы провести болѣе чѣмъ одну пару параллельныхъ линій черезъ двѣ точки?

17. Какое наибольшее и какое наименьшее число параллельныхъ линій, которыя можно провести черезъ 8 точекъ?

18. Помѣстите 3 точки такъ, чтобы одна прямая линія могла бы быть проведена черезъ нихъ въ сѣверо-восточномъ направленіи.

19. Размѣстите 3 точки такъ, чтобы 2 прямыя линіи могли быть проведены черезъ нихъ въ сѣверо-восточномъ направленіи.

20. Размѣстите точки такъ, чтобы такая линія не могла быть проведена черезъ нихъ.

2. Найти наибольшее число точекъ пересѣченія, которое можетъ быть образовано нѣкоторымъ числомъ прямыхъ линій, если онѣ раздѣлены различнымъ образомъ на двѣ группы, при чемъ линіи одной группы между собою параллельны, а линіи другой группы всѣ пересѣкаются въ одной точкѣ.

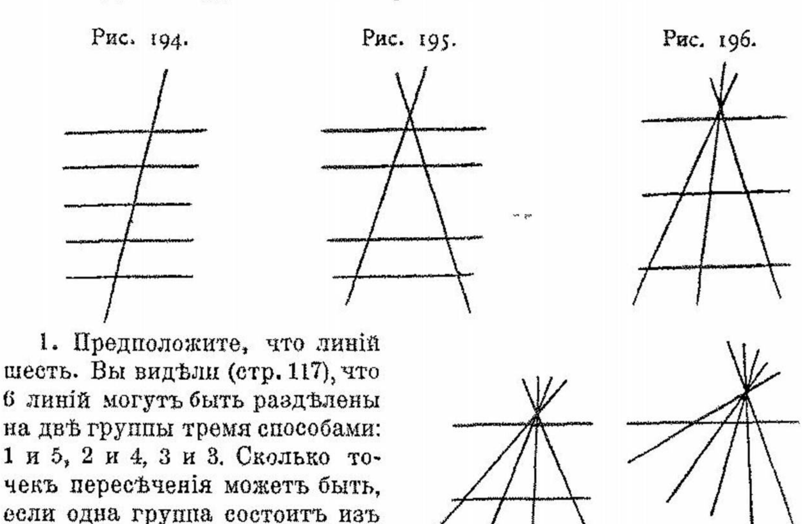


Рис. 194. Рис. 195. Рис. 196.

1. Предположите, что линій шесть. Вы видѣли (стр. 117), что 6 линій могутъ быть раздѣлены на двѣ группы тремя способами: 1 и 5, 2 и 4, 3 и 3. Сколько точекъ пересѣченія можетъ быть, если одна группа состоитъ изъ параллельныхъ линій, а другая изъ линій, пересѣкающихся въ одной точкѣ?

Рис. 197. Рис. 198.

Въ этой задачѣ та и другая группа въ каждомъ случаѣ можетъ состоять изъ параллельныхъ линій или изъ линій, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Слѣдовательно, при шести линіяхъ есть пять различныхъ перемѣщеній. И въ каждомъ перемѣщеніи будетъ группа линій, не имѣющихъ точки пересѣченія между собою, потому что онѣ параллельны, и будетъ группа линій, имѣющихъ одну общую точку пересѣченія; и каждая линія одной группы будетъ пересѣкать каждую линію другой группы въ одной точкѣ. Слѣдовательно, общее число точекъ пересѣченія будетъ найдено, прибавляя 1 къ произведенію чиселъ линій въ обѣихъ группахъ.

2. Какое наибольшее число точекъ пересѣченія между четырьмя прямыми линіями, раздѣленными на двѣ группы, если въ одной группѣ параллельныя, а въ другой линіи съ общей точкой пересѣченія?

3. Найдите то же самое для пяти прямыхъ линій.

4. Для семи прямыхъ линій.

5. Для восьми прямыхъ линій.

6. Если 12 линій раздѣлить на двѣ группы въ 8 и 4 и если большая группа будетъ состоять изъ параллельныхъ линій, то какое будетъ число точекъ пересѣченія сравнительно съ тѣмъ случаемъ, когда меньшая группа будетъ состоять изъ параллельныхъ?

7. Почему, если 12 линій раздѣлены на группы въ 11 и 1, то точекъ пересѣченія будетъ то одной больше, то одной меньше въ зависимости отъ того, которая группа будетъ сдѣлана параллельной?

8. Если точка пересѣченія непараллельной группы лежитъ въ серединѣ параллельной группы, будетъ ли общее число точекъ пересѣченія больше или меньше, чѣмъ тогда, когда точка лежитъ внѣ параллельныхъ?

9. Что, если эта точка лежитъ на одной изъ параллельныхъ линій?

10. Что, если линія одной группы будетъ параллельна одной линіи другой группы?

11. 15 линій, если онѣ раздѣлены на двѣ группы такъ, что линіи одной группы параллельны, а линіи другой имѣютъ общую точку пересѣченія, эти 15 линій образуютъ слѣдующія числа точекъ пересѣченія: 14, 15, 27, 37, 45, 51, 55, 57. Что вы можете замѣтить относительно постепенной разности между этими числами?

12. Слѣдующая табличка представляетъ числа точекъ пересѣченія линій, раздѣленныхъ на пары группъ,—одна группа параллельныхъ, а другая имѣющихъ общую точку взаимнаго пересѣченія.

3 линіи даютъ 2 или 3 точки пересѣченія.
4 „ „ 3 „ 4 или 5
5 „ „ 4 „ 5 „ 7
6 „ „ 5 „ 6 „ 9 или 10
7 „ „ 6 „ 7 „ 11 „ 13
8 „ „ 7 „ 8 „ 13 „ 16 или 17
9 „ „ 8 „ 9 „ 15 „ 19 „ 21
10 „ „ 9 „ 10 „ 17 „ 22 „ 25 или 26.

Что вы можете замѣтить относительно возрастанія этихъ чиселъ, если читать столбцы сверху внизъ?

13. Продолжите таблицу для 11 и 12 линій, руководясь выше приведенной схемой.

3. Найти наибольшее число точекъ пересѣченія, которыя могутъ имѣть прямыя линіи, если ихъ раздѣлить различными способами на пары группъ такъ, чтобы линіи одной группы были параллельны, а линіи другой группы пересѣкались бы другъ съ другомъ въ наибольшемъ числѣ точекъ.

1. Предположите, что число линій 6. Онѣ могутъ быть раздѣлены на группы по 5 и 1, 4 и 2, 3 и 3. Сколько точекъ пересѣченія можетъ быть, если одна группа состоитъ изъ параллельныхъ линій, а въ другой группѣ линіи пересѣкаются въ возможно большемъ числѣ точекъ?

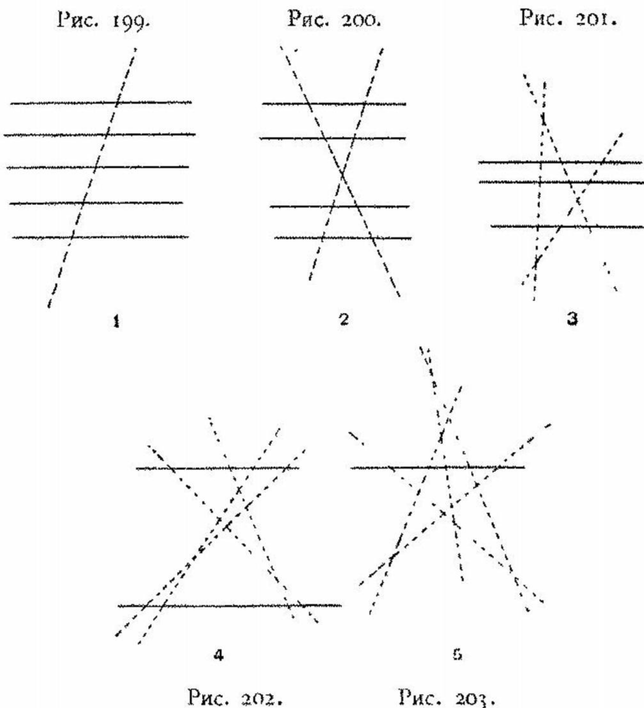


Рис. 199. Рис. 200. Рис. 201.

Рис. 202. Рис. 203.

Въ этой задачѣ та и другая группа въ каждомъ случаѣ можетъ состоять или изъ параллельныхъ линій или изъ линій, пересѣкающихся въ возможно большемъ числѣ точекъ; слѣдовательно, при 6 линіяхъ можетъ быть 5 перемѣщеній. Въ каждомъ перемѣщеніи бу-

детъ одна группа параллельныхъ линій, не имѣющихъ точекъ взаимнаго пересѣченія, и одна группа линій, имѣющихъ наибольшее число точекъ взаимнаго пересѣченія; число это (см. стр. 116) можетъ быть найдено, если умножить число линій въ группѣ на то же число безъ 1 и произведеніе раздѣлить на 2; при этомъ каждая линія въ одной группѣ можетъ пересѣкать каждую линію въ другой группѣ въ одной точкѣ.

Такимъ образомъ, если группы состоятъ изъ двухъ параллельныхъ линій и четырехъ пересѣкающихся въ наибольшемъ числѣ точекъ, то общее число точекъ пересѣченія будетъ $\frac{4 \times 3}{2} + 8 = 14$.

Число точекъ для всѣхъ пяти перемѣщеній будетъ 5, 9, 12, 14 и 15.

2. Какое наибольшее число точекъ пересѣченія могутъ дать четыре прямыхъ линіи, если ихъ раздѣлить разнообразными способами на пары группъ, при чемъ линіи одной группы будутъ параллельны, а линіи другой группы будутъ пересѣкаться въ возможно большемъ числѣ точекъ?

3. Найти то же самое для пяти прямыхъ линій.

4. Найти то же самое для семи прямыхъ линій.

5. Опредѣлите число точекъ для 12 прямыхъ линій, не дѣлая чертежей.

6. Если 20 линій будутъ раздѣлены на двѣ группы въ 14 и 6, то общее число точекъ пересѣченія будетъ ли то же самое, какъ и въ томъ случаѣ, если бы одна изъ группъ состояла изъ 11 линій?

7. Какое измѣненіе произойдетъ въ отвѣтѣ, если на второмъ чертежѣ перваго вопроса линіи одной группы будутъ параллельны одной изъ линій другой группы?

8. Какая перемѣна произойдетъ въ отвѣтѣ, если на третьемъ чертежѣ перваго вопроса двѣ линіи непараллельной группы будутъ пересѣкать одну изъ параллельныхъ линій въ одной и той же точкѣ?

9. Если прямая линія пересѣкла другую одинъ разъ, можетъ ли она пересѣчь ее еще разъ?

10. Если 15 прямыхъ линій раздѣлены на двѣ группы различнымъ образомъ такъ, что линіи одной группы параллельны, а линіи другой группы взаимно пересѣкаются въ возможно большемъ числѣ точекъ, то общее число точекъ пересѣченія будетъ такое: 14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 102, 104, 105. Что вы можете замѣтить относительно постепенныхъ разностей между этими числами?

11. Слѣдующая табличка представляетъ общія числа точекъ пересѣченія линій, раздѣленныхъ на пары группъ какъ въ предыдущемъ вопросѣ:

3	линіи	даютъ	2 или 3 точки пересѣченія						
4	„	„	3	„	5 или 6				
5	„	„	4	„	7	„	9 или 10		
6	„	„	5	„	9	„	12	„	14 или 15

7 линій даютъ	6 или	11 или	15 или	18 или	20 или	21				
8 „ „	7 „	13 „	18 „	22 „	25 „	27 или 28				
9 „ „	8 „	15 „	21 „	26 „	30 „	33 „	35 или 36			
10 „ „	9 „	17 „	24 „	30 „	35 „	39 „	42 „	44 или 45		

Что вы можете замѣтить относительно возрастанія этихъ чиселъ, если читать столбцы сверху внизъ?

12. Продолжите табличку для 11 и 12 линій, руководясь верхней схемой.

4. Найти наибольшее число точекъ пересѣченія, которыя могутъ дать прямыя, раздѣленныя различнымъ образомъ на пары группъ такъ, чтобы линіи каждой группы пересѣкались между собою въ одной точкѣ.

1. Предположите, что у васъ 6 линій. Онѣ могутъ быть разбиты на группы: 5 и 1, 4 и 2, 3 и 3. Сколько точекъ пересѣченія можетъ быть, если линіи каждой группы пересѣкаются между собою въ одной точкѣ?

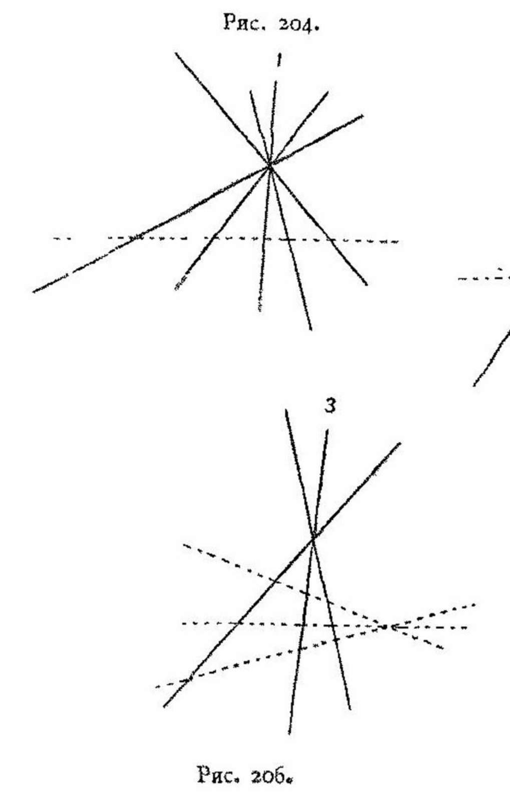


Рис. 204.

Рис. 205.

Рис. 206.

Въ этой задачѣ обѣ группы въ каждомъ случаѣ состоятъ изъ линій, пересѣкающихся между собою въ одной точкѣ; слѣдовательно, при шести линіяхъ можетъ быть три различныхъ сочетанія. Въ каждомъ случаѣ будетъ одна общая точка пересѣченія для линій

каждой группы, и каждая линія одной группы пересѣчетъ каждую линію другой группы. Слѣдовательно, общее число точекъ пересѣченія будетъ на 2 больше, чѣмъ произведеніе чиселъ линій въ каждой группѣ. Такимъ образомъ, если группы состоятъ изъ 2 и 4 линій, то общее число точекъ пересѣченія будетъ $2 + (2 \times 4) = 10$.

2. Какое наибольшее число точекъ пересѣченія, которыя могутъ дать четыре линіи, если ихъ раздѣлить разными способами на пары группъ, при чемъ линіи каждой группы будутъ пересѣкаться въ одной точкѣ?

3. Пять прямыхъ линій?

4. Семь прямыхъ линій?

5. Восемь прямыхъ линій?

6. Какъ измѣнится отвѣтъ, если во второмъ чертежѣ перваго вопроса одна линія одной группы будетъ параллельна одной линіи другой группы?

7. Какъ измѣнится отвѣтъ, если въ третьемъ чертежѣ перваго вопроса точка пересѣченія одной группы лежитъ на какой-нибудь линіи другой группы?

8. На картѣ, гдѣ города представлены простыми точками, было два города. Отъ одного изъ городовъ шли три прямыхъ дороги, а отъ другого двѣ прямыхъ дороги. Какое можетъ быть наибольшее число перекрестковъ на этихъ дорогахъ?

9. Какая будетъ разница въ отвѣтѣ на предыдущій вопросъ, если двѣ изъ этихъ дорогъ были параллельны?

10. А если одна изъ трехъ дорогъ отъ одного города проходитъ черезъ другой городъ?

11. Если 15 прямыхъ линій разбить различными способами на пары группъ такъ, чтобы линіи каждой группы пересѣкались въ одной точкѣ, то общее число точекъ пересѣченія будетъ такое: 15, 28, 38, 46, 52, 58. Что вы можете замѣтить относительно постепенныхъ разностей между этими числами?

12. Слѣдующая табличка представляетъ числа точекъ пересѣченія, образованныхъ линіями, раздѣленными на группы, какъ въ предыдущемъ вопросѣ:

3	линіи	даютъ	3					
4	„	„	4	или 6				
5	„	„	5	„ 8				
6	„	„	6	„ 10	или 11			
7	„	„	7	„ 12	„ 14			
8	„	„	8	„ 14	„ 17	или 18		
9	„	„	9	„ 16	„ 20	„ 22		
10	„	„	10	„ 18	„ 23	„ 26	или 27.	

Что вы можете замѣтить относительно возрастанія этихъ чиселъ точекъ пересѣченія, если читать столбцы сверху внизъ?

13. Продолжите табличку для 11 и 12 линій, руководясь вышеуказанной схемой.

ГЛАВА XXI.

Углы.

1. Углы, образуемые двумя прямыми линіями.

Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали:

1. Одинъ уголъ.
2. Два угла.
3. Четыре угла.
4. Почему двумя прямыми линіями нельзя образовать трехъ угловъ?
5. Почему двумя прямыми линіями нельзя образовать больше, чѣмъ четыре угла?

Проведите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы сдѣлать:

6. Острый уголъ.
7. Прямой уголъ.
8. Тупой уголъ.
9. Можете ли вы увеличить величину угла, удлинняя его стороны?
10 Если двѣ прямыя линіи выходятъ изъ одной точки, одна прямо на востокъ, а другая на сѣверо-западъ, то какого вида уголъ онѣ образуютъ?
11. Дайте таблицу дѣленій прямого угла (см. стр. 44). При помощи транспортира начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы образовались слѣдующіе углы, и противъ каждаго угла напишите его имя,—острый ли онъ, прямой или тупой:

12. 60^0	16. 55^0	20. 170^0
13. 100^0	17. 140^0	21. 10^0
14. 20^0	18. 85^0	22. 150^0
15. 90^0	19. 95^0	23. 30^0

24. Какой можетъ быть самый маленькій острый уголъ? Какой самый большой?
25. Какой можетъ быть самый маленькій тупой уголъ? Какой самый большой?
26. Бываетъ ли прямой уголъ различной величины?
27. Если острый уголъ увеличить вдвое, то можетъ ли получиться опять острый уголъ? Можетъ ли получиться прямой уголъ? Можетъ ли получиться тупой уголъ? Провѣрьте ваши отвѣты, сдѣлавши чертежъ и опредѣливши число градусовъ въ углахъ.
28. Если тупой уголъ удвоить, то какой получится результатъ? Провѣрьте вашъ отвѣтъ какъ и въ предыдущемъ вопросѣ.

29. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали уголъ въ 90°, и потомъ продолжите одну изъ линій за вершину; такимъ образомъ получится другой уголъ. Какой величины будетъ этотъ другой уголъ?

30. Проведите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали уголъ въ 60°, потомъ продолжите одну изъ сторонъ какъ раньше. Съ помощью транспортира опредѣлите величину второго угла. Какая сумма обоихъ угловъ?

31. Поступите точно такимъ же образомъ, начавши съ угла въ 105°.

32. То же самое, начавши съ угла въ 45°.

33. Находите ли вы, что, допуская ошибки при измѣреніи, сумма двухъ угловъ одна и та же во всѣхъ этихъ случаяхъ? Не составляетъ ли эта сумма 180°?

34. *Дополненіе* до какого-нибудь угла есть разность между этимъ угломъ и двумя прямыми углами. Будутъ ли каждые два угла въ вопросахъ 29—32 дополненіемъ другъ другу?

35. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали около одной точки углы въ 55° и 125°.

36. 150° и 30°.

37. 80° и 100°.

38. 95° и 85°.

39. Если одинъ изъ двухъ угловъ, образованныхъ двумя линіями, острый, какимъ долженъ быть другой уголъ?

40. Могутъ ли быть слѣдующіе углы образованы около одной точки двумя прямыми линіями: 110° и 85°? Сдѣлайте чертежъ, уясняющій вашъ отвѣтъ.

41. Если одинъ изъ угловъ, образованныхъ около одной точки двумя прямыми линіями, равенъ 83°20′, то какой другой уголъ?

42. Какое дополненіе будетъ 128°40′20″?

43. Какой уголъ образовался бы половинами угловъ въ 30-мъ вопросѣ?

44. Былъ ли бы тотъ же самый отвѣтъ на предыдущій вопросъ для половинъ всякихъ двухъ угловъ, образующихъ вмѣстѣ 180°?

45. *Пополненіе* угла есть разность между этимъ угломъ и прямымъ угломъ. Какое пополненіе 20°? 82°? 17°50′30″?

46. Начертите прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали прямой уголъ; затѣмъ продолжите каждую линію за вершину; такимъ образомъ получается еще три угла. Какая величина этихъ угловъ? Какая сумма въ градусахъ всѣхъ четырехъ угловъ?

47. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали уголъ въ 60°, и затѣмъ продолжите стороны, какъ въ предыдущемъ вопросѣ; транспортиромъ опредѣлите величину каждаго изъ остальныхъ угловъ. Какая сумма всѣхъ четырехъ угловъ?

48. Продѣлайте то же самое, начиная съ угла въ 45°.

49. Сдѣлайте то же самое, начиная съ угла въ 105°.

50. Не находите ли вы, что сумма четырехъ угловъ одна и та же во всѣхъ случаяхъ? Что она равна 360°?

51. Въ каждомъ случаѣ равны ли противоположные углы другъ другу?

52. Сколькихъ различныхъ величинъ были углы въ каждомъ случаѣ?

53. Былъ ли случай, когда всѣ четыре угла были одной и той же величины?

54. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали два угла по 80° и два по 100°.

55. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали четыре слѣдующихъ угла: 30°, 150°, 30°, 150°.

56. Начертите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали четыре угла, одинъ изъ которыхъ имѣетъ 20°.

Проведите двѣ прямыя линіи такъ, чтобы образовать:

57. Одинъ прямой уголъ.
58. Два прямыхъ угла.
59. Четыре прямыхъ угла.
60. Одинъ острый уголъ
61. Одинъ тупой уголъ.
62. Одинъ острый и одинъ тупой уголъ.
63. Два острыхъ и два тупыхъ угла.

2. Углы, образованные около одной точки тремя прямыми линіями.

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали слѣдующіе углы *):

1. Два угла
2. Три угла.
3. Четыре угла.
4. Пять угловъ.
5. Шесть угловъ.

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы образовать около одной точки слѣдующія группы угловъ:

6. 1 прямой и 1 острый.
7. 1 тупой и 1 острый.
8. 2 острыхъ.
9. 1 прямой и 2 острыхъ.
10. 1 тупой и 2 острыхъ.
11. 3 острыхъ.
12. 1 прямой и 2 тупыхъ.
13. 1 острый и 2 тупыхъ.
14. 3 тупыхъ.
15. 2 тупыхъ и 2 острыхъ.
16. 2 прямыхъ, 1 тупой и 1 острый
17. 3 прямыхъ и 2 острыхъ.
18. 2 тупыхъ и 2 острыхъ.
19. 1 тупой и 4 острыхъ.
20. 1 тупой, 1 прямой и 3 острыхъ.
21. 2 прямыхъ и 4 острыхъ.
22. 2 тупыхъ и 4 острыхъ.
23. 6 острыхъ.

*) Понятно, что каждый уголъ долженъ быть меньше 180°.

3. Углы, образованные около двухъ точекъ тремя прямыми линіями.

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы образовать около двухъ точекъ:

1 Два угла.
2 Три угла.
3. Четыре угла.
4. Пять угловъ.
5. Шесть угловъ.
6. Восемь угловъ.

7. Почему нельзя три прямыхъ линіи провести такъ, чтобы образовать семь угловъ около двухъ точекъ?

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы образовать около двухъ точекъ слѣдующія группы угловъ:

8. 1 прямой и 1 острый.
9. 1 прямой и 1 тупой.
10. 1 острый и 1 тупой.
11. 2 прямыхъ.
12. 2 острыхъ.
13. 2 тупыхъ.
14. 3 прямыхъ.
15. 2 прямыхъ и 1 острый.
16. 2 прямыхъ и 1 тупой.
17. 2 тупыхъ и 1 острый.
18. 2 острыхъ и 1 тупой.
19. 1 прямой, 1 острый и 1 тупой.
20. 4 прямыхъ.
21. 2 тупыхъ и 2 острыхъ.
22. 2 прямыхъ, 1 острый и 1 тупой.
23. 5 прямыхъ.
24. 4 прямыхъ и 1 острый.
25. 4 прямыхъ и 1 тупой.
26. 1 прямой, 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
27. 3 острыхъ и 2 тупыхъ.
28. 3 тупыхъ и 2 острыхъ.
29. 6 прямыхъ.
30. 4 прямыхъ, 1 острый и 1 тупой.
31. 2 прямыхъ, 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
32. 3 острыхъ и 3 тупыхъ.
33. 8 прямыхъ.
34. 4 прямыхъ, 2 острыхъ, 2 тупыхъ.
35. 4 острыхъ и 4 тупыхъ.

4. Углы, образованные около трехъ точекъ тремя прямыми линіями.

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы онѣ образовали около трехъ точекъ:

1. Три угла.
2. Четыре угла.
3. Пять угловъ
4. Шесть угловъ.
5. Семь угловъ.
6. Восемь угловъ.
7. Девять угловъ.
8. Десять угловъ.
9. Двѣнадцать угловъ
10. Почему такимъ способомъ нельзя образовать одиннадцати угловъ?

Проведите три прямыя линіи такъ, чтобы образовать около трехъ точекъ слѣдующія группы угловъ:

11. 3 острыхъ.
12. 1 прямой и 2 острыхъ.
13. 2 острыхъ и 1 тупой.
14. 2 прямыхъ и 2 острыхъ.
15. 1 прямой, 2 острыхъ и 1 тупой.
16. 3 острыхъ и 1 тупой.
17. 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
18. 2 прямыхъ, 2 острыхъ и 1 тупой.
19. 1 прямой, 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
20. 3 острыхъ и 2 тупыхъ.
21. 3 тупыхъ и 2 острыхъ.
22. 4 прямыхъ и 2 острыхъ.
23. 2 прямыхъ, 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
24. 1 прямой, 3 острыхъ и 2 тупыхъ.
25. 4 острыхъ и 2 тупыхъ.
26. 3 острыхъ и 3 тупыхъ.
27. 4 прямыхъ, 2 острыхъ и 1 тупой.
28. 2 прямыхъ, 3 острыхъ и 2 тупыхъ.
29. 1 прямой, 3 острыхъ и 3 тупыхъ.
30. 4 острыхъ и 3 тупыхъ.
31. 3 острыхъ и 4 тупыхъ.
32. 4 прямыхъ, 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
33. 2 прямыхъ, 3 острыхъ и 3 тупыхъ.
34. 4 острыхъ и 4 тупыхъ.
35. 4 прямыхъ, 3 острыхъ и 2 тупыхъ.
36. 1 прямой, 4 острыхъ и 4 тупыхъ.
37. 5 острыхъ и 4 тупыхъ.
38. 4 острыхъ и 5 тупыхъ.
39. 4 прямыхъ, 3 острыхъ и 3 тупыхъ.
40. 2 прямыхъ, 4 острыхъ и 4 тупыхъ.
41. 5 острыхъ и 5 тупыхъ.
42. 4 прямыхъ, 4 острыхъ и 4 тупыхъ.
43. 6 острыхъ и 6 тупыхъ.

ГЛАВА XXII.

Треугольники, четыреугольники и многоугольники.

Треугольники.

1. Просмотрите то, что сказано о треугольникахъ на стр. 51—54.

Постройте треугольникъ, имѣющій одну сторону въ 3 сантиметра, а углы при концахъ этой стороны въ 60° и 45°.

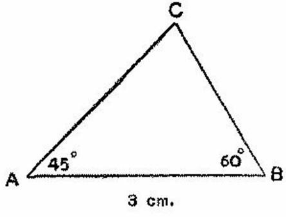


Рис. 207.

Начертите прямую линію AB 3 см. длиною. Отъ A проведите линію такъ, чтобы она образовала съ линіею AB уголъ въ 45°; и отъ B проведите линію такъ, чтобы она образовала съ AB уголъ въ 60°; продолжите эти линіи до тѣхъ поръ, пока онѣ встрѣтятся въ C. Тогда ABC будетъ требуемый треугольникъ.

Смѣряйте транспортиромъ уголъ С. Какая будетъ сумма угловъ А, В и С?

2. Постройте треугольникъ, имѣющій одну сторону въ 5 сантиметровъ, а углы при концахъ этой стороны въ 30^0 и 50^0.

Смѣряйте третій уголъ и найдите сумму всѣхъ трехъ угловъ.

3. Сдѣлайте то же самое, беря одну сторону въ 4 сантиметра и углы при ней въ 120^0 и 40^0.

4. Сдѣлайте то же самое, беря одну сторону въ 4 см. и углы при ней въ 20^0 и 40^0.

5. Сдѣлайте сторону въ 5 см. и углы въ 70^0 и 20^0.

Допуская неточности при измѣреніи угловъ, не находите ли вы, что эти пять треугольниковъ сходны въ суммѣ своихъ угловъ? Что эта сумма составляетъ 180^0?

6. Постройте треугольникъ, имѣющій одну сторону въ 4 см., а углы при ея концахъ по 40^0. Смѣряйте третій уголъ, найдите сумму всѣхъ трехъ угловъ и сравните длину сторонъ, противолежащихъ равнымъ сторонамъ.

7. Сдѣлайте то же самое, взявши сторону въ 5 см. и равные углы по 30^0.

8. Сдѣлайте то же самое, взявши сторону въ 5 см. и равные углы по 45^0.

По послѣднимъ тремъ треугольникамъ что вы можете замѣтить относительно равенства сторонъ, когда есть два равныхъ угла въ треугольникѣ?

9. Постройте треугольникъ, имѣющій сторону въ 5 см. и углы при концахъ ея каждый по 60^0. Что вы можете сказать относительно третьяго угла и третьей стороны этого треугольника?

10. Постройте треугольникъ со стороною въ 8 см. и съ углами при концахъ ея въ 30^0 и 60^0. Смѣряйте третій уголъ и другія двѣ стороны:

a) Лежитъ ли длиннѣйшая сторона противъ наибольшаго угла?

в) Лежитъ ли самая короткая сторона противъ наименьшаго угла?

c) 60^0 вдвое больше 30^0; но сторона, противолежащая 60^0, будетъ ли вдвое длиннѣе стороны противъ 30^0?

d) Есть ли какая-нибудь сторона, которая вдвое длиннѣе противолежащей 30^0?

11. Какая сумма угловъ всякаго треугольника?

12. Если три угла равны между собою, то сколько будетъ градусовъ въ каждомъ изъ нихъ?

13. Сколько угловъ въ треугольникѣ можетъ быть тупыхъ?

14. Сколько угловъ можетъ быть прямыхъ?

15. Постройте треугольникъ, имѣющій три острыхъ угла.

16. Постройте треугольникъ, имѣющій одинъ тупой и два острыхъ угла.

17. Постройте треугольникъ, имѣющій одинъ прямой и два острыхъ угла.

Четыреугольники.

2. Просмотрите то, что было сказано о четыреугольникахъ на стр. 29—32.

Постройте четыреугольники, углы которыхъ должны быть слѣдующіе:

1. 4 прямыхъ.
2. 2 прямыхъ, 1 острый и 1 тупой.
3. 1 прямой, 2 острыхъ и 1 тупой.
4. 1 прямой, 1 острый и 2 тупыхъ.
5. 3 острыхъ и 1 тупой.
6. 2 острыхъ и 2 тупыхъ.
7. 1 острый и 3 тупыхъ.

8. 90^0, 90^0, 90^0, 90^0. И пусть будутъ всѣ стороны равны. Какъ называется эта фигура?

9. 90^0, 90^0, 90^0, 90^0. Сдѣлайте фигуру, у которой не всѣ стороны равны между собою. Замѣтьте, которыя стороны равны и параллельны. Какъ называется эта фигура?

10. 90^0, 90^0, 160^0, 20^0. Пусть у фигуры двѣ стороны параллельны. Какъ она называется?

11. 90^0, 90^0, 160^0, 20^0. Пусть фигура не имѣетъ параллельныхъ сторонъ. Какъ она называется?

11. 100^0, 80^0, 100^0, 80^0. Расположите углы такъ, чтобы фигура могла быть параллелограммомъ.

13. Расположите углы предыдущей задачи такъ, чтобы фигура *могла быть трапеціей.*

14. 150^0, 30^0, 150^0, 30^0. Пусть фигура будетъ параллелограммъ.

15. Измѣните фигуру предыдущей задачи въ ромбъ.

16. Какая разница между ромбомъ и параллелограммомъ?

17. Могутъ ли стороны ромба и стороны параллелограмма быть равными одна другой?

18. Какая разница между прямоугольникомъ и параллелограммомъ?

19. Могутъ ли стороны прямоугольника и стороны параллелограмма быть равными между собою?

20. Какая разница между квадратомъ и прямоугольникомъ?

21. Какая разница между ромбомъ и квадратомъ?

22. Могутъ ли стороны ромба и стороны квадрата быть равными *между собою?*

23. Въ какомъ частномъ отношеніи сходны между собою квадратъ и прямоугольникъ?

24. Въ чемъ сходны ромбъ и квадратъ?

25. Что можно сказать одинаковаго обо всѣхъ четырехъ фигурахъ: ромбѣ, квадратѣ, прямоугольникѣ и параллелограммѣ?

Многоугольники.

3. Просмотрите то, что было сказано о многоугольникахъ на стр. 71—78.

Сколько сторонъ имѣютъ слѣдующіе многоугольники:

1. Четыреугольникъ.
2. Пятиугольникъ.
3. Шестиугольникъ.
4. Семиугольникъ.
5. Восьмиугольникъ.
6. Девятиугольникъ.
7. Десятиугольникъ.
8. Двѣнадцатиугольникъ.
9. Пятнадцатиугольникъ.
10. Двадцатиугольникъ.

Углами многоугольника называются углы, образуемые его встрѣчающимися сторонами, какъ ABC, BCD и т. д.

Они измѣряются внутри многоугольника и иногда называются внутренними углами.

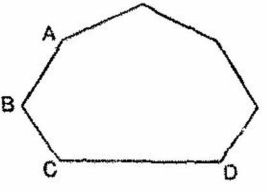


Рис. 208.

11. Сколько угловъ бываетъ у многоугольника сравнительно съ числомъ его сторонъ?

12. У многоугольника съ 30 сторонами?

Вершинами многоугольника называются вершины его угловъ, какъ A, B, C и т. д.

Сколько вершинъ имѣютъ слѣдующіе многоугольники:

13. Ромбъ.
14. Пятиугольникъ.
15. Шестиугольникъ.
16. Семиугольникъ.
17. Восьмиугольникъ.
18. Девятиугольникъ.
19. Десятиугольникъ.
20. Двѣнадцатиугольникъ.

21. Сколько вершинъ бываетъ у многоугольника сравнительно съ числомъ его угловъ? Сравнительно съ числомъ его сторонъ?

22. Сколько вершинъ у многоугольника съ 40 сторонами?

Діагональю многоугольника называется прямая линія, соединяющая какія-нибудь двѣ вершины, *не лежащія на одной и той же сторонѣ*, какъ AC, AD и т. д. Если провести отъ какой-нибудь вершины (напримѣръ, A) всевозможныя діагонали, то многоугольникъ раздѣлится на треугольники ABC, ACD и т. д.

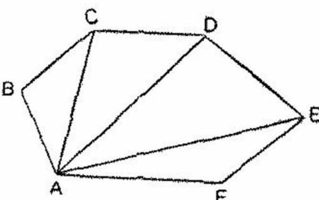


Рис. 209.

На сколько треугольниковъ можно раздѣлить слѣдующіе многоугольники, проведя діагонали отъ какой-нибудь вершины:

23. Четыреугольникъ.
24. Пятиугольникъ.
25. Шестиугольникъ.
26. Семиугольникъ.
27. Восьмиугольникъ.
28. Девятиугольникъ.
29. Десятиугольникъ.
30. Треугольникъ.

31. Число треугольниковъ меньше числа сторонъ всегда на одно и то же число: на сколько именно меньше? почему?

32. На сколько треугольниковъ можно разбить сорокаугольникъ, проведя діагонали отъ какой-нибудь одной вершины?

Начертите всевозможныя діагонали въ слѣдующихъ многоугольникахъ и найдите число ихъ въ каждомъ случаѣ:

33. Четыреугольникъ.
34. Шестиугольникъ.
35. Семиугольникъ.
36. Восьмиугольникъ.

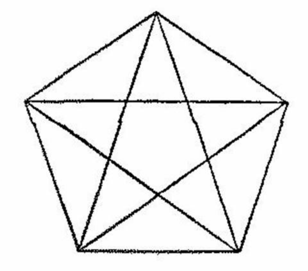


Рис. 210.

37. Число діагоналей, которыя могутъ быть проведены отъ какой-нибудь одной вершины, всегда меньше, чѣмъ число сторонъ, на одну и ту же величину: на сколько именно меньше? почему?

38. Если вы умножите число діагоналей, которыя можно провести отъ одной вершины, на число вершинъ, то произведеніе будетъ больше, чѣмъ число *различныхъ* діагоналей: во сколько именно разъ больше?

39. Какое правило вы можете дать для нахожденія общаго числа различныхъ діагоналей въ какомъ-нибудь многоугольникѣ?

40. Опредѣлите полное число діагоналей въ 20-угольникѣ.

41. Опредѣлите то же самое въ 30-угольникѣ.

42. Опредѣлите общее число діагоналей у 48-угольника.

4. Найти сумму всѣхъ угловъ многоугольника.

ABCDEF есть многоугольникъ съ шестью сторонами.

Отъ одной изъ вершинъ А проведите всѣ діагонали, и вы такимъ образомъ раздѣлите многоугольникъ на треугольники.

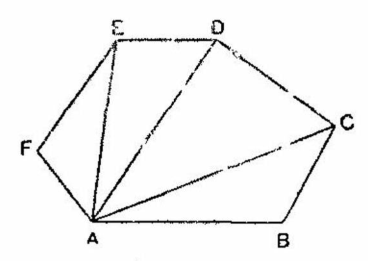


Рис. 211.

1. Сколько будетъ треугольниковъ сравнительно съ числомъ сторонъ?

2. Очевидно ли для васъ, что сумма угловъ этихъ треугольниковъ та же самая, какъ и сумма угловъ многоугольника?

3. Какая сумма угловъ всякаго треугольника?

4. Какая сумма угловъ всѣхъ треугольниковъ ABC, ACD и т. д. вмѣстѣ?

5. Затѣмъ, какая сумма всѣхъ угловъ многоугольника ABCDEF?

6. Если сумма есть восемь прямыхъ угловъ, то какая сумма въ градусахъ?

7. Дополните слѣдующую таблицу, показывающую число треугольниковъ, изъ которыхъ состоятъ многоугольники, и сумму ихъ угловъ:

3	стороны,	1 треугольникъ,	2 прямыхъ	угла.
4	„	2 треугольника, 4	„	„
5	„	„	„	„
6	„	„	„	„
7	„	„	„	„

Что вы замѣчаете относительно возрастанія чиселъ когда вы читаете столбцы сверху внизъ?

Изъ предыдущихъ примѣровъ можетъ быть выведено слѣдующее правило:

Чтобы найти сумму угловъ какого-нибудь многоугольника, отнимите 2 отъ числа его сторонъ и удвойте остатокъ; результатъ будетъ суммой угловъ, выраженной въ прямыхъ углахъ; если результатъ умножить на 90, то онъ будетъ суммой угловъ, выраженной въ градусахъ.

Найдите сумму угловъ слѣдующихъ многоугольниковъ, выражая результатъ въ прямыхъ углахъ и въ градусахъ:

8. Восьмиугольникъ.
9. Девятиугольникъ.
10. Десятиугольникъ.
11. Двѣнадцатиугольникъ.
12. Пятнадцатиугольникъ.
13. Восемнадцатиугольникъ.
14. Двадцатиугольникъ.
15. Двадцатичетырехугольникъ.
16. Двадцатипятиугольникъ.
17. Тридцатиугольникъ.

18. Тридцатидвухъугольникъ.
19. Сорокаугольникъ.
20. Сорокавосьмиугольникъ.

Такъ какъ углы правильнаго многоугольника равны между собою, то величина одного изъ угловъ можетъ быть опредѣлена дѣленіемъ суммы всѣхъ угловъ на число сторонъ многоугольника.

Найдите въ градусахъ величину одного угла слѣдующихъ правильныхъ многоугольниковъ:

21. Пятиугольникъ.
22. Шестиугольникъ.
23. Семиугольникъ.
24. Восьмиугольникъ.
25. Девятиугольникъ.
26. Десятиугольникъ.
27. Двѣнадцатиугольникъ.
28. Пятнадцатиугольникъ.
29 Двадцатиугольникъ.
30. Тридцатидвухъугольникъ.

5. Пятиугольники и шестиугольники. Въ пятиугольникахъ возможны десять различныхъ сочетаній тупыхъ, прямыхъ и острыхъ угловъ. Въ особенности надо позаботиться при построеніи этихъ фигуръ о наибольшей точности ихъ угловъ.

Постройте пятиугольники, которые имѣли бы слѣдующіе углы:

31. 5 тупыхъ.
32. 4 тупыхъ, 1 прямой.
33. 4 тупыхъ, 1 острый.
34. 3 тупыхъ, 2 прямыхъ.
35. 3 тупыхъ, 1 прямой, 1 острый
36. 3 тупыхъ, 2 острыхъ.
37. 2 тупыхъ, 3 прямыхъ.
38. 2 тупыхъ, 2 прямыхъ, 1 острый.
39. 2 тупыхъ, 1 прямой, 2 острыхъ.
40. 2 тупыхъ, 3 острыхъ.

Въ шестиугольникахъ возможны десять различныхъ сочетаній тупыхъ, прямыхъ и острыхъ угловъ.

Здѣсь также надо обратить вниманіе на то, чтобы сдѣлать точныя, изящныя и симметричныя фигуры.

Постройте шестиугольники, которые имѣли бы слѣдующіе углы:

41. 6 тупыхъ.
42. 5 тупыхъ, 1 прямой.
43. 5 тупыхъ, 1 острый.
44. 4 тупыхъ, 2 прямыхъ.
45 4 тупыхъ, 2 острыхъ.
46. 4 тупыхъ, 1 прямой, 1 острый.
47. 3 тупыхъ, 2 прямыхъ, 1 острый.
48. 3 тупыхъ, 1 прямой, 2 острыхъ.
49. 3 тупыхъ, 3 прямыхъ.
50. 3 тупыхъ, 3 острыхъ.

ГЛАВА XXIII.

Круги.

1. **Положеніе круговъ относительно другъ друга.** Просмотрите то, что сказано о кругахъ на стр. 82—88.

1. Два круга могутъ имѣть одинъ и тотъ же центръ, и въ этомъ случаѣ они называются концентрическими кругами, и ихъ окружности не имѣютъ общихъ точекъ.

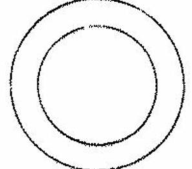


Рис. 212.

2. Два круга могутъ имѣть различные центры. Сдѣлайте чертежи для иллюстраціи слѣдующихъ случаевъ:

a) Одинъ кругъ лежитъ цѣликомъ внутри другого, но окружности не имѣютъ общихъ точекъ.

b) Одинъ кругъ лежитъ цѣликомъ внутри другого, и окружности имѣютъ одну общую точку.

c) Одинъ кругъ лежитъ отчасти внутри другого и окружности имѣютъ двѣ общія точки.

d) Круги лежатъ совершенно внѣ другъ друга, но ихъ окружности имѣютъ одну общую точку.

e) Круги лежатъ совершенно внѣ другъ друга, и ихъ окружности не имѣютъ общихъ точекъ.

1. Начертите два концентрическихъ круга такъ, чтобы радіусъ одного былъ равенъ діаметру другого.

2. Начертите два круга такъ, чтобы центръ каждаго изъ нихъ лежалъ на окружности другого.

Начертите два круга, съ центрами на концахъ прямой АВ, такъ, чтобы:

3. Ихъ площади не могли имѣть общей точки.

4. Ихъ площади имѣли бы одну общую точку.

5. Площадь одного включалась бы въ площадь другого.

6. Начертите кругъ; затѣмъ начертите еще два круга внутри перваго и чтобы у каждаго изъ нихъ діаметръ равнялся бы радіусу перваго круга.

7. Начертите три концентрическихъ круга такъ, чтобы радіусъ наибольшаго былъ равенъ суммѣ радіусовъ остальныхъ.

Начертите два круга, съ центрами на концахъ прямой линіи АВ, такъ, чтобы ихъ окружности:

8. Не имѣли общихъ точекъ.

9. Имѣли одну общую точку.

10. Имѣли двѣ общихъ точки.

Начертите два круга такъ, чтобы разстояніе между ихъ центрами было:

11. Равно суммѣ ихъ радіусовъ.

12. Меньше, чѣмъ сумма ихъ радіусовъ.

13. О.

14. Больше, чѣмъ разность между ихъ радіусами.

15. Равно разности между ихъ радіусами.

16. Меньше, чѣмъ разность между ихъ радіусами.

17. Начертите три круга равныхъ радіусовъ съ центрами на прямой линіи такъ, чтобы окружность средняго круга проходила черезъ центры двухъ другихъ.

18. Начертите три неравныхъ круга: два внутри третьяго, съ центрами на одной прямой линіи, такъ, чтобы радіусъ одного былъ бы равенъ суммѣ радіусовъ двухъ другихъ.

19. Начертите три равныхъ круга съ центрами на прямой линіи, которая равна суммѣ ихъ діаметровъ.

20. Начертите три круга такъ, чтобы центры двухъ лежали каждый на двухъ другихъ окружностяхъ.

2. Хорды круговъ. *Хорда*—это прямая линія, которая стягиваетъ концы дуги. Слово хорда первоначально означало струну музыкальнаго инструмента, похожаго на арфу.

Рис. 213.

1. Начертите хорду, которая была бы равна радіусу круга.

2. Проведите хорду черезъ центръ круга. Какъ вы назовете такую хорду въ отличіе отъ другихъ.

3. Проведите въ кругѣ самую длинную хорду, какую вы можете. Что вы можете сказать объ этой хордѣ?

4. Проведите неравныя хорды, перпендикулярныя другъ къ другу.

5. Проведите хорду какой-нибудь длины. Проведите діаметры черезъ ея концы и три другія хорды черезъ концы діаметровъ. Какой видъ имѣетъ четыреугольникъ, образованный этими четырьмя хордами?

6. Если AB есть діаметръ круга, то гдѣ его центръ?

7. Проведите діаметръ. Затѣмъ начертите четыре хорды различной длины, каждую перпендикулярно къ этому діаметру. Можете ли вы сказать, на какія части дѣлитъ діаметръ эти хорды?

8. Если вы проведете перпендикуляръ къ средней точкѣ хорды, черезъ какую особенную точку круга пройдетъ этотъ перпендикуляръ?

9. Послѣдніе два вопроса подсказываютъ способъ нахожденія центра круга, когда центръ не обозначенъ на чертежѣ.

Понимаете ли вы, какъ это можно сдѣлать?

10. Черезъ одну точку на окружности сколько можно провести хордъ одинаковой длины?

Сколько діаметровъ?

3. **Дѣленіе окружности на дуги.** AB и CD діаметры, проведенные перпендикулярно другъ къ другу. Вы можете видѣть, что они дѣлятъ окружность на четыре равныя дуги.

Также, если радіусы проведены такъ, что дѣлятъ прямой уголъ BOC на четыре равные угла, то дуга BC тоже раздѣлится на четыре равныя дуги, и каждая дуга будетъ соотвѣтствовать одному изъ четырехъ угловъ.

Какъ прямой уголъ BOC можетъ быть раздѣленъ на 90 равныхъ частей, каждая по 1^0, точно такъ же и дуга BC можетъ быть раздѣлена на 90 равныхъ частей, и каждая такая часть называется дугою въ 1^0, и дуга въ 1^0 подраздѣляется еще на дуги въ $1'$ и $1''$. Слѣдовательно, цѣлая окружность состоитъ изъ 360^0 частей, каждая изъ которыхъ есть дуга въ 1^0.

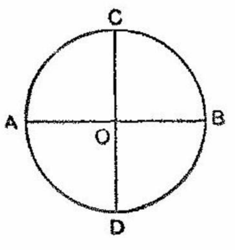


Рис. 214.

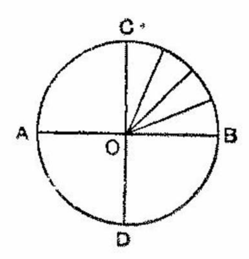


Рис. 215.

Это понятіе выражается словами: „уголъ при центрѣ или центральный уголъ измѣряется дугою между его сторонами“, что означаетъ, что уголъ, образованный двумя радіусами, есть точно такая же часть четырехъ прямыхъ угловъ, какъ дуга между концами радіусовъ есть часть цѣлой окружности. Такимъ образомъ, если уголъ AOB есть 40^0, то дуга AB есть также 40^0.

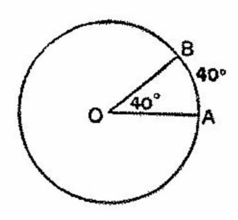


Рис. 216.

На окружность даннаго круга нанести дугу требуемой величины.

1.—При помощи транспортира.

Пусть O есть центръ даннаго круга и 70^0 есть требуемая дуга.

Проведите OA и OB радіусы, образующіе уголъ въ 70^0. Тогда AB будетъ требуемой дугой.

Начертите круги съ какими-нибудь подходящими радіусами и нанесите при помощи транспортира слѣдующія дуги, по одной на каждой окружности:

1) 20^0 2) 50^0. 3) 80^0. 4) 140^0. 5) 160^0.

Дуга какой-нибудь опредѣленной величины можетъ быть построена и безъ вычерчиванія полной окружности.

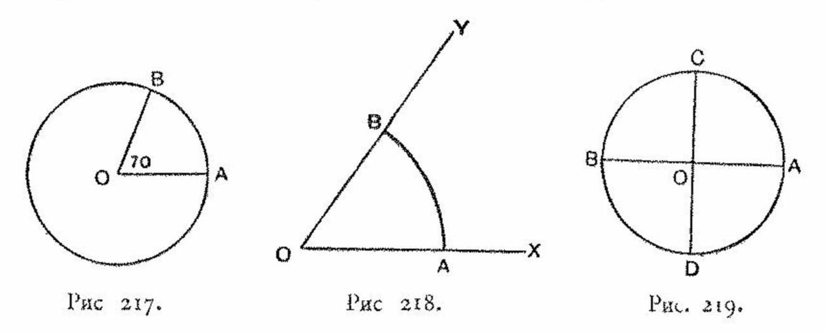


Рис 217. Рис 218. Рис. 219.

Если требуемая дуга имѣетъ 55^0, постройте уголъ XOY въ 55^0. Затѣмъ изъ вершины O, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ радіусу круга, проведите между сторонами угла дугу AB. Это и будетъ требуемая дуга.

Постройте слѣдующія дуги безъ вычерчиванія окружности:

6) 40^0 7) 65^0 8) 100^0 9) 115^0 10) 130^0 11) 120^0.

2.—Нанести дугу съ помощью циркуля.

Нѣкоторыя дуги могутъ быть построены съ помощью циркуля быстрѣе и точнѣе, чѣмъ съ транспортиромъ.

Главнѣйшіе случаи слѣдующіе:

a) Построить дугу въ 90^0.

Проведите два діаметра AB и CD, перпендикулярные другъ къ другу. Тогда каждая изъ четырехъ обозначившихся такимъ образомъ дугъ будетъ требуемой дугой въ 90^0, каждая изъ нихъ есть одна четверть цѣлой окружности.

b) Построить дугу въ 60^0.

Начертите хорду, равную радіусу круга. Тогда дуга AB будетъ требуемой дугой въ 60°.

Если вы проведете радіусы OA и OB, то треугольникъ AOB будетъ равностороннимъ, и каждая сторона его будетъ равна радіусу; слѣдовательно, каждый уголъ будетъ равенъ 60°; а если уголъ O есть 60°, то соотвѣтствующая ему дуга будетъ также въ 60°.

c) Построить дугу въ 150°.

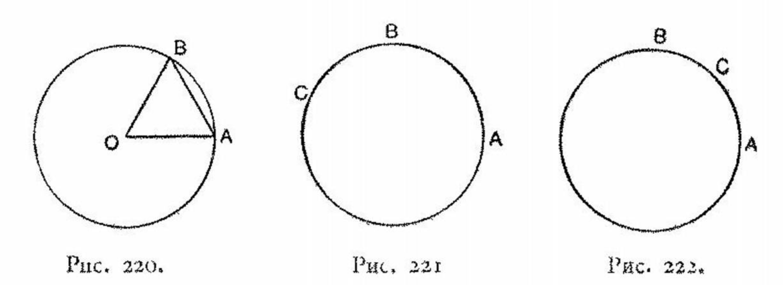


Рис. 220. Рис. 221 Рис. 222.

Прежде всего нанесите дугу AB, равную 90°.

Затѣмъ, начиная отъ B, нанесите дугу BC, равную 60°. Дуга AC будетъ требуемой дугой въ 150°.

Такъ какъ $AC = AB + BC = 90° + 60° = 150°$.

d) Построить дугу въ 30°.

Сначала нанесите дугу въ 90°.

Затѣмъ отмѣтьте часть дуги AB, именно AC, равную 60°. CB будетъ требуемой дугой въ 30°

Такъ какъ $CB = AB - AC = 90° - 60° = 30°$.

e) Построить дугу въ 45°.

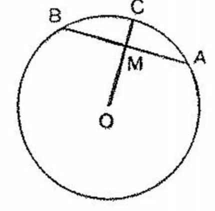


Рис 223.

Сначала нанесите дугу AB, равную 90°, и проведите ея хорду. Затѣмъ начертите радіусъ OC, проходящій черезъ M — среднюю точку хорды AB. Дуги AC и CB будутъ каждая равны требуемой дугѣ въ 45°. Это потому, что радіусъ (или діаметръ), который проходитъ черезъ среднюю точку хорды, будетъ также проходить и черезъ среднюю точку дуги, стягиваемой этой хордой.

Такимъ образомъ $AC = CB =$ половинѣ $90° = 45°$.

Съ помощью циркуля постройте слѣдующія дуги:

12) 15°. 13) 75°. 14) 105°. 15) 120°. 16) 135°.
17) 7°30′. 18) 37°30′. 19) 52°30′ 20) 97°30′. 21) 67°30′.

4. **Касательныя.** Касательная есть прямая линія, которая имѣетъ одну только точку, общую съ окружностью, какъ бы далеко она ни была продолжена.

Кромѣ того, у касательной есть еще два свойства, о которыхъ слѣдуетъ сказать:

1) Касательная имѣетъ то же самое направленіе, какъ и окружность въ точкѣ касанія.

Желѣзнодорожныя кривыя даютъ понятіе объ этомъ свойствѣ, какъ это было объяснено на стр. 85—86; прямые рельсы касаются кривыхъ въ той точкѣ, гдѣ они расходятся.

2) Касательная перпендикулярна къ радіусу (или діаметру), проведенному въ точку касанія.

Зная это, легко провести касательную, если извѣстна точка касанія.

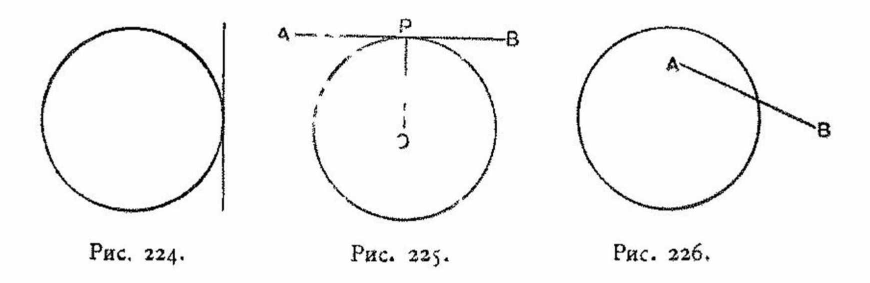


Рис. 224. Рис. 225. Рис. 226.

Предположимъ, что вы желаете провести касательную въ точкѣ P. Прежде всего проведите радіусъ OP. Затѣмъ въ точкѣ P проведите прямую линію AB, перпендикулярно къ OP. AB будетъ требуемой касательной.

1. Начертите кругъ: возьмите какую-нибудь точку на окружности и проведите касательную въ этой точкѣ.

2. На прилагаемомъ чертежѣ 226 AB не есть касательная къ кругу. Почему?

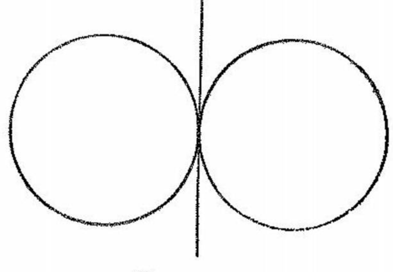
3. Проведите касательныя къ каждому концу одного и того же діаметра и сравните ихъ направленіе.

4. Проведите два діаметра, перпендикулярные другъ къ другу, и затѣмъ проведите касательныя къ каждому концу этихъ діаметровъ, продолжите касательныя до ихъ взаимной встрѣчи. Какую форму имѣетъ фигура, образованная этими касательными?

5. Найти три точки на окружности, расположенныя такимъ образомъ, чтобы три дуги, на которыя раздѣлится окружность, были каждая по 120°. Затѣмъ проведите касательныя въ каждой точкѣ и

продолжите ихъ до взаимной встрѣчи. Какую форму имѣетъ фигура, образованная этими фигурами?

Два круга называются касательными другъ къ другу, если они могутъ касаться одной и той же линіи въ одной и той же точкѣ.


Рис. 227.

6. Изображенные на чертежѣ 227 круги называются касающимися *внѣшне*, потому что одинъ кругъ лежитъ внѣ другого. Каково разстояніе между ихъ центрами сравнительно съ величиной ихъ радіусовъ?

7. Сдѣлайте чертежъ, на которомъ круги касались бы внутренно, т.-е. чтобы одинъ кругъ лежалъ внутри другого. Каково разстояніе между ихъ центрами сравнительно съ величиной ихъ радіусовъ?

8. Сдѣлайте чертежъ, на которомъ три круга всѣ касались бы въ одной и той же точкѣ. Будутъ ли три центра и точка касанія лежать на одной и той же прямой линіи?

9. Какъ вы начертите линію черезъ точку, которая лежитъ на данной окружности, такъ, чтобы на ней лежали центры всѣхъ круговъ, которые могутъ касаться даннаго круга въ данной точкѣ?

5. **Сѣкущія**. Сѣкущая есть прямая линія, которая пересѣкаетъ окружность въ двухъ точкахъ, какъ AB.

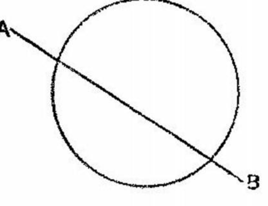


Рис. 228.

Если линія идетъ внѣ круга и доходитъ до одной только точки окружности, она все-таки разсматривается какъ сѣкущая. Въ дѣйствительности во многихъ задачахъ *длина* сѣкущей понимается какъ разстояніе отъ точки внѣ круга, гдѣ эта сѣкущая начинается, до другой точки, гдѣ она встрѣчается съ окружностью.

1. Если вы продолжите хорду, чѣмъ она сдѣлается?

2. Начертите хорду круга и сѣкущую, длина которой равна длинѣ хорды.

3. Почему касательная не можетъ превратиться въ сѣкущую, сколько ее ни продолжай?

4. Отъ точки внѣ круга проведите четыре сѣкущихъ, каждую оканчивающуюся тамъ, гдѣ она встрѣчается съ окружностью второй разъ. Которыя изъ этихъ сѣкущихъ будутъ длиннѣе: болѣе близкія или болѣе удаленныя отъ центра круга?

5. Какъ вы начертите самую длинную сѣкущую изъ точки, лежащей внѣ круга?

6. Изъ точки внѣ круга какъ вы проведете сѣкущую, оканчивающуюся во второй точкѣ встрѣчи съ окружностью, такъ, чтобы возможно большая часть ея лежала внѣ круга?

7. Въ двухъ концентрическихъ кругахъ проведите линію, которая была бы хордой одного и сѣкущей другого круга.

8. Въ двухъ концентрическихъ кругахъ проведите линію, которая была бысѣкущей одного и самой длинной хордой другого.

9. Въ двухъ пересѣкающихся кругахъ проведите линію, которая была бы хордой обоихъ. Затѣмъ измѣните эту общую хорду въ общую сѣкущую, имѣющую двойную длину противъ хорды.

10. Начертите два круга, касающіеся внѣшне. Затѣмъ проведите линію, которая была бы обоими концами въ окружностяхъ и такъ, чтобы она была сѣкущей обоихъ круговъ и равнялась бы суммѣ ихъ діаметровъ.

ГЛАВА XXIV.

Правильные многоугольники.

1. **Правильный многоугольникъ** есть многоугольникъ, который въ одно и то же время и равносторонній и равноугольный (см. стр. 72).

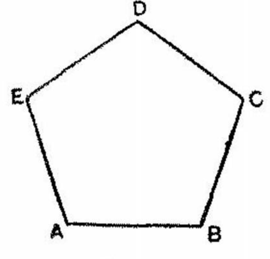


Рис. 229.
Правильный многоугольникъ.

Легко построить правильный многоугольникъ при помощи циркуля и приложенія слѣдующихъ истинъ:

1) Если окружность раздѣлена на равныя дуги, хорды этихъ дугъ также равны и углы, образуемые хордами, также равны; полученный такимъ образомъ многоугольникъ будетъ, слѣдовательно, правильнымъ. Многоугольникъ называется тогда вписаннымъ въ кругъ.

Всякій многоугольникъ, будетъ ли онъ правильнымъ или нѣтъ, называется вписаннымъ, если всѣ его стороны служатъ хордами для круга.

2) Если окружность раздѣлена на равныя дуги, то касательныя, проведенныя въ точкахъ дѣленія дугъ и продолженныя до ихъ взаимнаго пересѣченія, будутъ равными и углы, образованные касательными, будутъ также равны. Полученный такимъ образомъ многоугольникъ будетъ, слѣ-

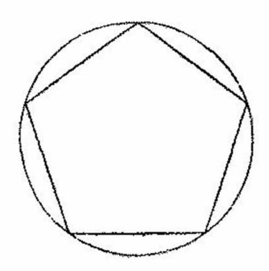


Рис. 230.
Вписанный правильный многоугольникъ.

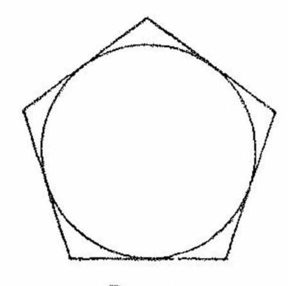


Рис. 231.
Описанный правильный многоугольникъ.

довательно, правильнымъ. Такой многоугольникъ называется *описаннымъ* около круга.

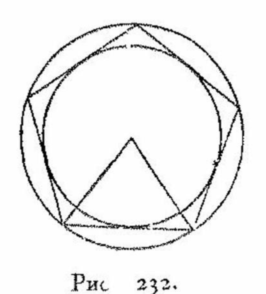
Всякій многоугольникъ, будетъ ли онъ правильный или нѣтъ, называется описаннымъ, если всѣ его стороны являются касательными къ кругу.

Слѣдовательно, для построенія правильнаго многоугольника съ какимъ-нибудь числомъ сторонъ нужно прежде всего начертить кругъ и раздѣлить окружность на такое число равныхъ частей, сколько сторонъ долженъ будетъ имѣть многоугольникъ (сдѣлать это съ помощью транспортира или циркуля, какъ это показано на стр. 142); затѣмъ въ точкахъ дѣленія дугъ провести хорды или касательныя, смотря по тому, долженъ ли быть многоугольникъ вписаннымъ или описаннымъ.

Постройте вписанные и описанные правильные многоугольники слѣдующаго числа сторонъ, употребляя одинъ и тотъ же кругъ для двухъ многоугольниковъ съ одинаковымъ числомъ сторонъ:

1. Треугольникъ вписанный.
2. „ описанный.
3. Квадратъ вписанный
4. „ описанный.

5 Пятиугольникъ вписанный.
6 „ описанный.
7 Шестиугольникъ вписанный.
8. Шестиугольникъ описанный.
9. Восьмиугольникъ вписанный
10. „ описанный


Рис 232.

Центръ правильнаго многоугольника есть та же самая точка, какъ и центръ его вписаннаго или описаннаго круга.

Уголъ при центрѣ или *центральный уголъ* правильнаго многоугольника есть уголъ, образуемый двумя линіями, проведенными изъ центра многоугольника къ двумъ сосѣднимъ вершинамъ. Во всякомъ правильномъ многоугольникѣ этотъ уголъ равенъ 360°, раздѣленнымъ на число сторонъ многоугольника.

Найти въ градусахъ величину центральнаго угла слѣдующихъ правильныхъ многоугольниковъ:

1. Треугольника
2. Квадрата.
3. Пятиугольника
4. Шестиугольника.
5. Семиугольника
6. Восьмиугольника.
7. Девятиугольника.
8. Десятиугольника.
9. Пятнадцатиугольника.
10. Двадцатиугольника.

2. **Найти длину окружности круга**. Длину кривой линіи обыкновенно трудно найти дѣйствительнымъ вымѣриваніемъ. Иногда вы можете прибѣгнуть къ гибкой линейкѣ, тесьмѣ или лентѣ, которыя будутъ изгибаться, какъ бы слѣдуя за кривой. Тѣмъ не менѣе длину кривой обыкновенно находятъ вычисленіями, которыя зависятъ отъ природы каждой кривой, о которой идетъ рѣчь. По этой причинѣ инженеры и механики стараются употреблять тѣ кривыя, природа которыхъ извѣстна.

Окружность круга есть одна изъ кривыхъ, длина которой можетъ быть легко вычислена. Геометры доказали, что окружность немного больше, чѣмъ въ три раза, длины своего діаметра, т.-е. если діаметръ есть 2 дюйма, то окружность будетъ немного больше, чѣмъ 6 дюймовъ.

Вы можете это провѣрить, обернувши бумажную ленточку вокругъ кривой поверхности цилиндра, измѣривши длину ея и сравнивши ее съ длиною діаметра основанія цилиндра.

Сдѣлайте слѣдующія вычисленія, предполагая, что длина окружности въ три раза больше длины ея діаметра:

1.	Діаметръ	=	2 сантиметра,	окружность	= ?			
2.	„	=	3 „	„	= ?			
3.	„	=	4 „	„	= ?			
4.	„	=	2 дюйма	„	= ?			
5	Радіусь	=	1 сантиметръ	„	= ?			
6.	„	=	2 „	„	= ?			
7.	Окружность	=	6 сантиметр.,	діаметръ	= ?	радіусъ	= ?	
8.	„	=	9 „	„	= ?	„	= ?	
9.	„	=	3 дюйма	„	= ?	„	= ?	
10.	„	=	12 „	„	= ?	„	= ?	

Геометры доказали, что *точное* отношеніе между окружностью и ея діаметромъ не можетъ быть выражено числомъ; и они условились обозначать его греческою буквою π (произносится пи). Это означаетъ, что окружность въ π разъ длиннѣе своего діаметра. π приблизительно равно $3\frac{1}{7}$; т.-е. если діаметръ 5 сантиметровъ, то окружность будетъ 5π или около $15\frac{5}{7}$ сантиметровъ длиною.

Сдѣлайте слѣдующія вычисленія, принимая π равнымъ $3\frac{1}{7}$:

11.	Діаметръ	=	1 сантиметръ,	окружность	= ?
12.	„	=	2 „	„	= ?
13.	„	=	3 „	„	= ?
14.	„	=	7 „	„	= ?
15.	Радіусь	=	1 дюймь	„	= ?
16.	„	=	2 „	„	= ?
17.	„	=	3 „	„	= ?
18.	Окружность	=	22 сантиметра,	діаметръ	= ?
19.	„	=	44 „	радіусъ	= ?
20.	„	=	11 дюймовъ	„	= ?

3. **Найти длину дуги.** Для того, чтобы опредѣлить длину дуги, вы должны знать величину дуги въ градусахъ и длину окружности, часть которой составляетъ эта дуга.

Предположите, что дуга AB имѣетъ 70° и діаметръ круга 3 сантиметра.

Во 1-хъ, цѣлая окружность есть 3π или $3 \times 3\frac{1}{7}$ или $9\frac{3}{7}$ см.

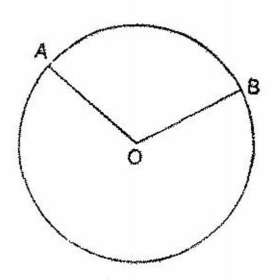


Рис. 233.

Во 2-хъ, такъ какъ дуга имѣетъ 70°, а цѣлая окружность содержитъ 360°, то наша дуга есть $\frac{70}{360}$ или $\frac{7}{36}$ окружности.

Слѣдовательно, длина дуги есть $9\frac{3}{7} \times \frac{7}{36}$, или $\frac{66}{7} \times \frac{7}{36}$, или $\frac{11}{6}$, или $1\frac{5}{6}$ сантиметра.

Высчитайте длину слѣдующихъ дугъ, принимая $\pi = 3\frac{1}{7}$:

1. Дуга 35°, діаметръ круга = 1 см.
2. Дуга 60°, „ „ = 7 „
3. Дуга 70°, „ „ = 14 „
4. Дуга 140°, радіусъ „ = 35 мм.
5. Дуга 90°, „ „ = 4 см.

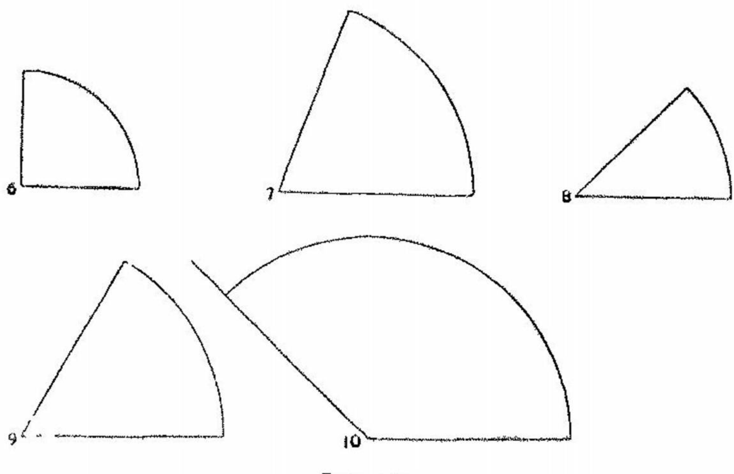


Рис. 234.

ГЛАВА XXV.

Построенія.

1. Построить прямую линію, которая была бы равна данной прямой линіи.

а) При помощи линейки съ дѣленіями:

Пусть AB будетъ данная линія.
Смѣряйте AB линейкой и затѣмъ проведите XY той же длины. XY будетъ требуемой линіей.

A ——— B

X ——— Y

в) При помощи циркуля и обыкновенной линейки:

A ——— B
P
X ——— Z ——— Y
R

Пусть AB будетъ данной линіей.
Проведите прямую XY, которая на глазъ была бы длиннѣе чѣмъ AB.
Изъ X, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ AB, проведите дугу PR, пересѣкающую XY въ Z.
XZ будетъ требуемой линіей.

Пользуясь циркулемъ и линейкой, постройте прямыя линіи, равныя слѣдующимъ:

1 ———
2 ———
3 ———
4 ———
5 ———
6 ———
7 ———
8 ———
9 ———
10 ———

2. **Раздѣлить пополамъ данную прямую линію.**

а) При помощи линейки съ дѣленіями.

A ——— M ——— B

Пусть AB данная линія.
Прикладывая линейку къ AB, вы найдете, что ея длина 6 сантим.
Раздѣлите эту длину на 2 и отложите частное 3 сантиметра отъ A или отъ B до точки M, которая и будетъ средней точкой линіи AB.

в) При помощи циркуля и простой линейки.

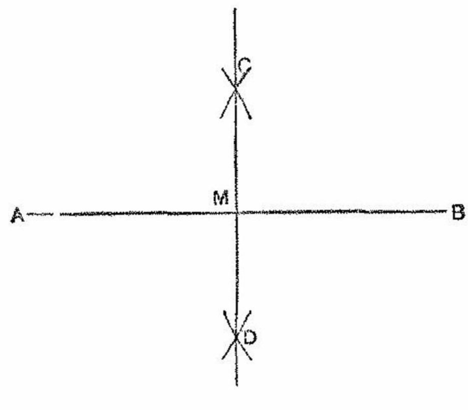


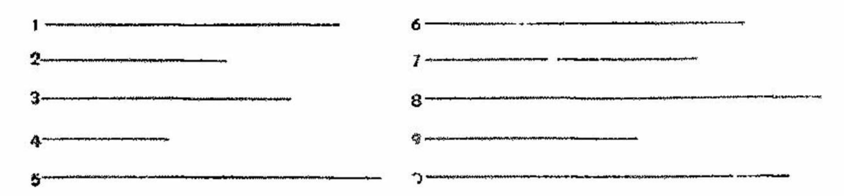
Рис. 235.

Пусть AB данная линія.

Изъ A и B, какъ изъ центровъ, какими-нибудь равными радіусами, которые, очевидно, больше половины AB, проведите дуги, пересѣкающія другъ друга въ C и D по обѣ стороны AB.

Соедините C и D прямой линіей, пересѣкающей AB въ M, которая и будетъ средней точкой AB.

Постройте прямыя линіи, равныя даннымъ, и раздѣлите ихъ пополамъ при помощи циркуля и линейки.



3. Опустить перпендикуляръ изъ данной точки на данную прямую линію.

а) При помощи наугольника.

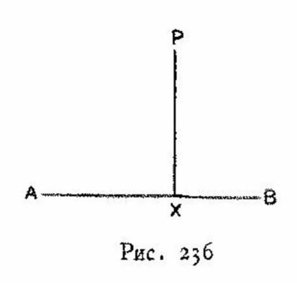


Рис. 236

Пусть P есть данная точка, и AB данная прямая.

Приложите наугольникъ такъ, чтобы одинъ катетъ пришелся по AB, а другой прошелъ бы черезъ точку P; вдоль этого катета проведите линію PX до AB.

PX будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

в) При помощи циркуля и простой линейки.

Пусть P будетъ данной точкой и AB данной прямой.

Изъ P, какъ изъ центра и какимъ-нибудь радіусомъ на глазъ очевидно большимъ, чѣмъ разстояніе по перпендикуляру отъ P до AB, проведите дугу, пересѣкающую AB въ C и D.

Изъ С и D, какъ изъ центровъ, радіусомъ на глазъ большимъ, чѣмъ длина половины CD, проведите дуги, пересѣкающіяся въ Е.

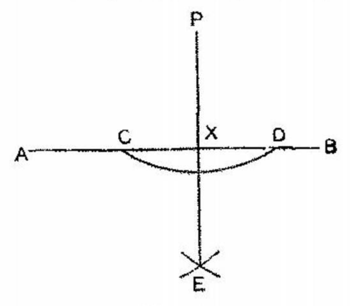


Рис. 237.

Проведите прямую PE, пересѣкающую AB въ X.

PX будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

4. Провести перпендикуляръ къ данной прямой изъ данной на ней точки.

а) При помощи наугольника:

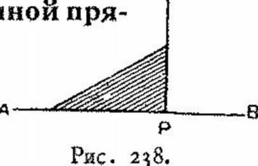


Рис. 238.

Пусть AB будетъ данной прямой и P данной точкой на AB.

Приложите наугольникъ такъ, чтобы вершина прямого угла была въ P и одна сторона его легла по AB. Вдоль другой стороны проведите PX, которая будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

в) При помощи транспортира и линейки.

Пусть AB будетъ данной прямой и P данной точкой на AB.

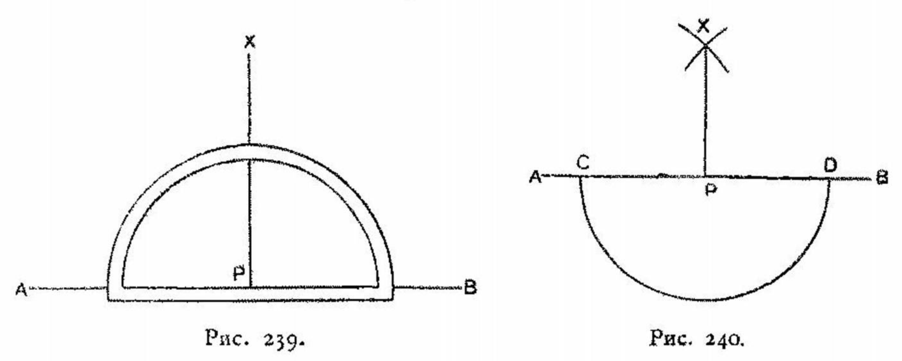


Рис. 239. Рис. 240.

Приложите прямой край транспортира къ AB такъ, чтобы зарубочка была въ P. Затѣмъ проведите PX такъ, чтобы образовался уголъ BPX, равный 90⁰.

XP будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

с) При помощи циркуля и простой линейки.

Пусть АВ данная линія и Р данная на ней точка.

Изъ Р, какъ изъ центра, какимъ-нибудь подходящимъ радіусомъ проведите дугу, пересѣкающую АВ въ С и D. Изъ С и D, какъ изъ центровъ, радіусомъ большимъ, чѣмъ СР, начертите двѣ дуги, пересѣкающіяся въ какой-нибудь точкѣ X. Проведите прямую линію XP, которая будетъ требуемымъ перпендикуляромъ (рис. 240).

5. **Построить дугу, которая была бы равна данной дугѣ какъ по градусамъ, такъ и по длинѣ.**

а) При помощи транспортира.

Этотъ способъ объясненъ на стр. 48 и 142.

в) При помощи циркуля и простой линейки.

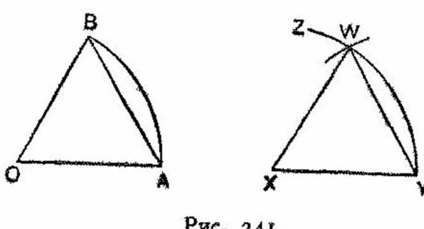


Рис. 241.

Пусть АВ будетъ данная дуга.

Если центръ О не данъ вмѣстѣ съ дугою, найдите его при помощи задачи 9 на стр. 140. Проведите хорду АВ и радіусъ ОВ.

Изъ какой-нибудь точки X, какъ изъ центра, и радіусомъ, равнымъ ОВ, начертите дугу YZ, на глазъ болѣе длинную, чѣмъ данная дуга.

Изъ Y, какъ изъ центра, и радіусомъ, равнымъ хордѣ АВ, проведите дугу, пересѣкающую YZ въ W.

YW будетъ требуемой дугой.

6. **Построить уголъ, который былъ бы равенъ данному углу.**

а) При помощи транспортира:

Эта задача объяснена на стр. 48.

в) При помощи циркуля и простой линейки.

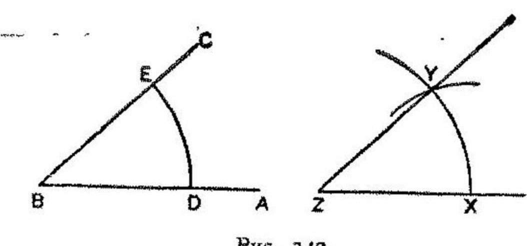


Рис. 242.

Пусть АВС данный уголъ.

Изъ В, какъ изъ центра, какимъ-нибудь подходящимъ радіусомъ, проведите между сторонами угла дуги DE.

Затѣмъ постройте дугу XY, равную DE.

Черезъ Z, центръ изъ котораго очерчена дуга XY, проведите радіусы ZX и ZY.

XZY будетъ требуемымъ угломъ.

7. **Раздѣлить данную дугу пополамъ** (рис. 243).

а) При помощи транспортира и линейки.

Пусть AB данная дуга и O центръ ея круга. Проведите радіусы OA и OB.

Смѣряйте транспортиромъ уголъ AOB и раздѣлите число его градусовъ на 2. Затѣмъ, принимая O за вершину, на OA или OB постройте уголъ, равный найденной половинѣ градусовъ; пусть другой бокъ его пересѣкаетъ AB въ Y.

Y будетъ средней точкой дуги AB.

в) При помощи наугольника и линейки съ дѣленіями (рис. 244).

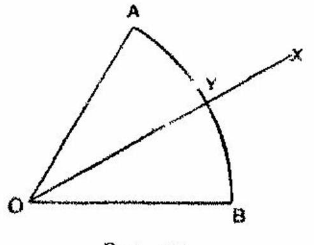


Рис. 243.

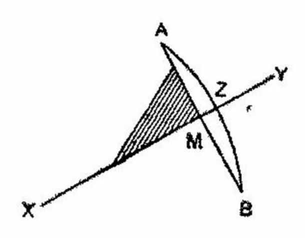


Рис. 244.

Пусть AB будетъ данная дуга. Проведите хорду AB и при помощи линейки найдите ея среднюю точку M. Черезъ M проведите XMY, перпендикулярно къ хордѣ AB и, пересѣкая дугу AB, къ точкѣ Z.

Z будетъ средней точкой дуги AB.

с) При помощи циркуля и простой линейки.

Пусть AB данная дуга.

Проведите хорду AB и раздѣлите ее пополамъ (какъ объяснено на стр. 152) линіею XY, пересѣкающей дугу AB въ точкѣ Z.

Z будетъ средней точкой дуги AB.

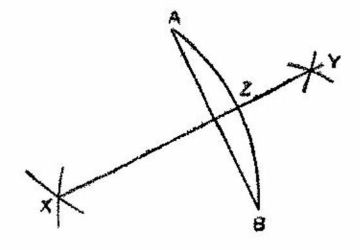


Рис. 245.

8. **Раздѣлить пополамъ данный уголъ.**

а) При помощи транспортира и линейки.

Способъ сходенъ съ дѣленіемъ пополамъ данной дуги.

в) При помощи наугольника и линейки съ дѣленіями:

Пусть ABC данный уголъ.

Отложите отъ B какія-нибудь равныя разстоянія—BD на BA и BE на BC.

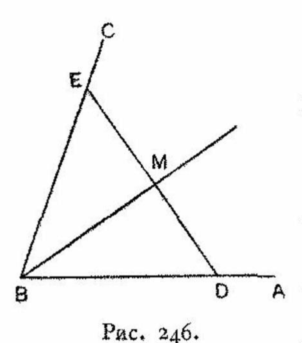


Рис. 246.

Проведите прямую DE.

При помощи наугольника проведите BM перпендикулярно къ DE.

BM раздѣлитъ пополамъ уголъ ABC.

c) При помощи одной линейки съ дѣленіями.

Поступайте такъ, какъ въ случаѣ (в), до тѣхъ поръ, пока ни проведете линію DE.

Затѣмъ съ помощью линейки раздѣлите DE пополамъ и соедините среднюю точку съ вершиной угла; эта линія будетъ такая же, какъ и BM, и раздѣлитъ уголъ пополамъ.

d) При помощи циркуля и простой линейки (рис. 247).

Пусть ABC данный уголъ.

Изъ B, какъ изъ центра, какимъ-нибудь подходящимъ радіусомъ проведите дугу между сторонами угла. Раздѣлите эту дугу пополамъ линіею BX, которая раздѣлитъ также и уголъ ABC.

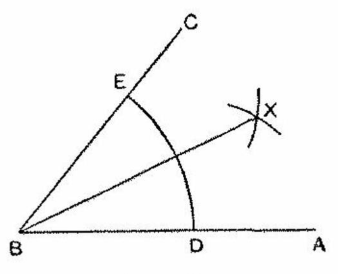


Рис. 247.

9. Описать кругъ около квадрата.

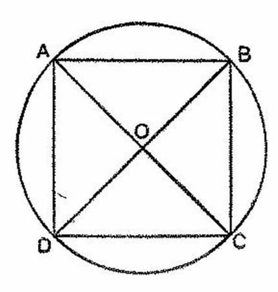


Рис. 248

Пусть ABCD есть квадратъ.

Проведите діагонали, и пусть O будетъ ихъ точкой пересѣченія.

Изъ O, какъ изъ центра, и радіусомъ OA (= OB = OC = OD) начертите кругъ, который будетъ искомымъ кругомъ, описаннымъ около квадрата.

10. Вписать кругъ въ квадратъ.

Пусть ABCD квадратъ.

Проведите діагонали и пусть O будетъ точкой ихъ пересѣченія.

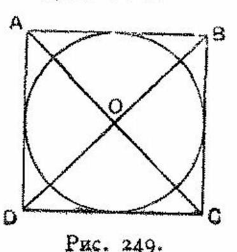


Рис. 249.

Изъ О, какъ изъ центра, и радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны квадрата, начертите кругъ, который будетъ искомымъ кругомъ, вписаннымъ въ квадратъ.

Постройте слѣдующіе квадраты и начертите круги внутри и внѣ ихъ:

1. Сторона	2 см.		6. Сторона	1	дюймъ
2. „	3 „		7. „	2	„
3. „	4 „		8. „	3	„
4. „	5 „		9. „	$1^1/_2$	„
5. „	25 мм.		10. „	$2^1/_2$	„

11. Описать кругъ около треугольника.

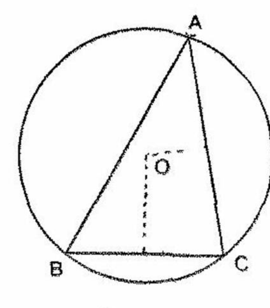


Рис. 250.

Пусть ABC треугольникъ какого-нибудь вида.

Возставьте перпендикуляры въ среднихъ точкахъ какихъ-нибудь двухъ сторонъ и продолжите ихъ до ихъ встрѣчи въ О. Эта точка будетъ на одинаковомъ разстояніи отъ всѣхъ трехъ вершинъ треугольника.

Изъ О, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ OA (= OB = OC), начертите кругъ, который будетъ искомымъ кругомъ, описаннымъ около треугольника.

12. Вписать кругъ въ треугольникъ.

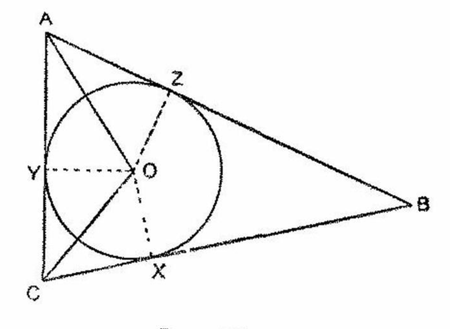


Рис. 251.

Пусть ABC есть треугольникъ какого-нибудь вида.

Раздѣлите пополамъ какіе-нибудь два угла и продолжите равнодѣлящія до ихъ встрѣчи въ О, которая будетъ на равномъ разстояніи отъ всѣхъ трехъ сторонъ.

Изъ О, какъ изъ центра радіусомъ, равнымъ перпендикуляру OX (= OY = OZ), начертите окружность, которая будетъ искомой окружностью, вписанной въ треугольникъ.

Если треугольникъ равносторонній, то центръ вписаннаго круга будетъ въ то же время и центромъ круга описаннаго.

Постройте равносторонніе треугольники по даннымъ сторонамъ и опишите и впишите круги въ каждый изъ нихъ:

1. Сторона	3	см.	6. Сторона	2	д.
2. „	4	„	7. „	3	„
3. „	5	„	8. „	4	„
4. „	25	мм.	9. „	$1\frac{1}{2}$	„
5. „	35	„	10. „	$2\frac{1}{2}$	„

13. Различныя задачи на построеніе.

1. A, B, C и D вершина квадрата, описаннаго около круга. Изъ каждой вершины, какъ изъ центра и радіусомъ, равнымъ радіусу круга, проведите дуги внутри круга, оканчивающіяся у окружности. Пусть радіусъ круга одинъ дюймъ.

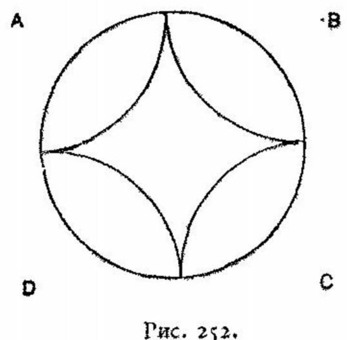


Рис. 252.

2. Постройте квадратъ. Затѣмъ изъ каждой вершины, какъ изъ центра, и радіусомъ, равнымъ одной изъ сторонъ, проведите дуги внутри квадрата до его сторонъ.

3. Постройте квадратъ и проведите его діагонали. Затѣмъ изъ среднихъ точекъ сторонъ, радіусами, равными четверти діагонали, начертите круги.

4. Постройте квадратъ. Затѣмъ изъ каждой вершины, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ половинѣ діагонали, начертите дуги внутри квадрата до встрѣчи съ его сторонами. Соедините концы этихъ дугъ такъ, чтобы образовался восьмиугольникъ.

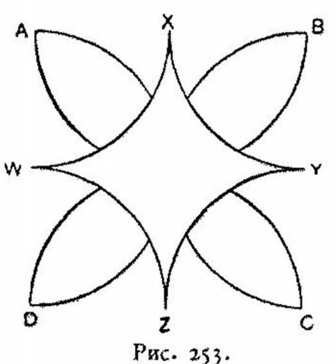


Рис. 253.

5. A, B, C, D вершины квадрата и X, Y, Z, W среднія точки его сторонъ. Изъ каждой изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны квадрата, проведите дуги такъ, чтобы образовалась приложенная фигура. Пусть сторона квадрата имѣетъ два дюйма въ длину.

6. Постройте квадратъ. Затѣмъ изъ вершинъ и среднихъ точекъ его сторонъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ,

равнымъ половинѣ стороны квадрата, проведите дуги внѣ квадрата, оканчивающіяся у его сторонъ.

7. Постройте квадратъ. Затѣмъ на каждой сторонѣ его, какъ на діаметрѣ, начертите полуокружность внутри квадрата.

8. Постройте квадратъ и проведите его діагонали. Изъ вершинъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ, равнымъ четверти его діагонали, проведите дуги внутри квадрата до его сторонъ. Изъ точки пересѣченія діагоналей, какъ изъ центра, и тѣмъ же самымъ радіусомъ начертите окружность, которая будетъ касательная къ другимъ дугамъ.

9. Начертите кругъ и обозначьте на немъ вершины вписаннаго равносторонняго треугольника. Изъ каждой такой точки, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ радіусу круга, проведите дуги внутри круга до его окружности.

10. Постройте равносторонній треугольникъ. Затѣмъ изъ каждой вершины, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ сторонѣ треугольника, проведите дуги между двумя другими вершинами.

11. A, B, C вершины вписаннаго равносторонняго треугольника, и OA, OB и OC радіусы. На этихъ радіусахъ, какъ на діаметрахъ, начертите дуги такъ, чтобы онѣ встрѣтили другъ друга какъ на чертежѣ 254. Пусть радіусъ круга 2 см. Постройте фигуру.

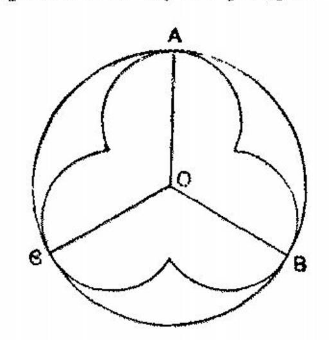


Рис. 254.

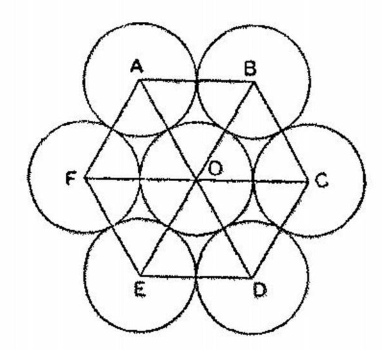


Рис. 255.

12. Начертите равносторонній треугольникъ. Затѣмъ изъ каждой вершины, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны треугольника, опишите окружности. Эти три окружности будутъ касаться другъ друга.

13. Начертите кругъ и обозначьте вершины правильнаго вписаннаго шестиугольника. Изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, и радіусомъ, равнымъ радіусу круга, начертите внутри круга дуги, оканчивающіяся у окружности.

14. ABCDEF правильный шестиугольникъ, діагонали котораго взаимно пересѣкаются въ точкѣ O. Изъ O и изъ каждой вершины

шестиугольника, какъ изъ центровъ, радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны шестиугольника, начертите круги. Шесть изъ нихъ будутъ касаться седьмого. Пусть сторона шестиугольника одинъ дюймъ. Постройте фигуру 255.

15. Начертите кругъ и впишите въ него правильный шестиугольникъ. На сторонахъ шестиугольника, какъ на діаметрахъ, начертите круги.

16. A, B, C, D, вершины квадрата На сторонахъ квадрата, какъ на діаметрахъ, начерчены внутри полуокружности. Изъ вершинъ квадрата, какъ изъ центровъ, радіусомъ, равнымъ сторонѣ квадрата, начерчены снаружи дуги до ихъ взаимной встрѣчи. Пусть сторона квадрата 3 см. Постройте фигуру 256.

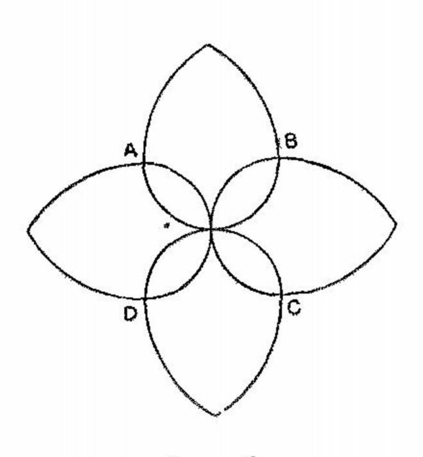


Рис. 256.

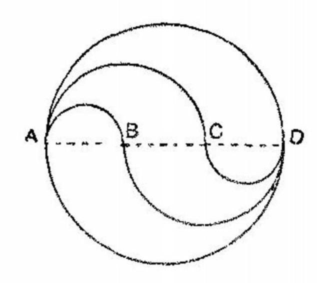


Рис. 257.

17. Обозначьте вершины квадрата и постройте фигуру, имѣющую положеніе обратное тому, что въ предыдущей задачѣ: полуокружности начертите снаружи, а другія дуги внутри.

18. Начертите кругъ и обозначьте вершины правильнаго вписаннаго двѣнадцатиугольника. Пропуская каждую третью вершину изъ остальныхъ вершинъ, какъ изъ центровъ, радіусомъ, равнымъ радіусу круга, начертите дуги отъ окружности до центра.

19. Постройте равносторонній треугольникъ. Изъ среднихъ точекъ сторонъ проведите перпендикуляры до встрѣчи въ одной точкѣ и продолжите ихъ въ противоположномъ направленіи, такъ чтобы часть внѣ треугольника равнялась бы части внутри его. Изъ наружныхъ концовъ этихъ перпендикуляровъ, какъ изъ центровъ, проведите дуги внѣ треугольника такъ, чтобы стороны его служили хордами для этихъ дугъ.

20. AD есть діаметръ круга, и онъ точками B и C раздѣленъ на три равныя части. На AB, AC, BD и CD, какъ на діаметрахъ, начерчены полуокружности, по одной съ каждой стороны діаметра (рис. 257).

21. Начертите кругъ съ діаметромъ въ 8 см., раздѣлите его на четыре равныя части и начертите четыре полуокружности, такъ чтобы образовалась фигура, похожая на ту, что въ предыдущей задачѣ.

22. Начертите кругъ и обозначьте вершины вписаннаго квадрата. Изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, и радіусомъ, равнымъ радіусу круга, проведите полуокружности, которыя будутъ всѣ проходить черезъ центръ круга и встрѣтятся такъ, что образуютъ четырехлистную фигуру

23. Обозначьте вершины равносторонняго треугольника. Затѣмъ изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, и радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны треугольника, начертите круги.

24. Начертите фигуру, подобную 258. A, B и C вершины равносторонняго треугольника, каждая сторона котораго по 4 см.; X, Y и Z среднія точки стороны.

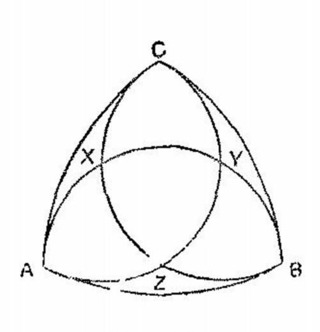


Рис. 258.

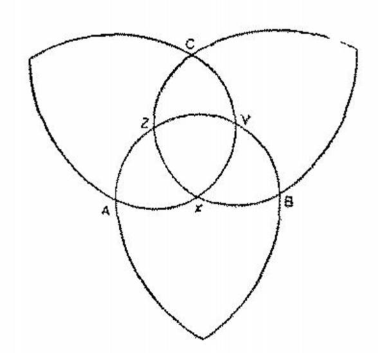


Рис. 259.

25. Постройте фигуру, подобную 259. A, B и C вершины равносторонняго треугольника; X, Y и Z среднія точки его стороны. Три полуокружности начерчены на сторонахъ и шесть дугъ, у которыхъ центры въ вершинахъ, а радіусы равны одной изъ сторонъ. Разстояніе между A и B $1^1/_2$ дюйма.

26. Постройте фигуру, у которой тѣ же самыя дуги, какъ въ задачѣ 25, но положеніе ихъ обратное, такъ что полуокружности будутъ начерчены внѣ, а другія дуги внутри треугольника.

27. Начертите кругъ и обозначьте вершины правильнаго вписаннаго восьмиугольника. Изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, и радіусомъ, равнымъ сторонѣ восьмиугольника, проведите дуги внутри круга до встрѣчи съ окружностью.

ГЛАВА XXVI.

Площади.

Площади многоугольниковъ. Просмотрите то, что сказано о площадяхъ на стр. 24—25.

Для справки.

При измѣреніи площадей въ Америкѣ употребляются обыкновенно двѣ системы: метрическая и англійская.

Таблица метрической системы.

100 кв. миллиметровъ (кв. мм.) = 1 кв. сантиметру (кв. см.) = $^1/_6$ кв. дюйм. приблизительно.

100 кв. сантиметровъ = 1 кв. дециметру (кв. дцм.) = $^1/_9$ кв. фута приблизительно.

100 кв. дециметровъ = 1 кв. метру (кв. м.) = 1 сектару = $1^1/_3$ кв. ярда приблизительно.

100 кв. метровъ = 1 кв. декаметру (кв. дкм.) = 1 ару (ар.) = 4 кв. родамъ приблизительно.

100 кв. декаметровъ = 1 кв. гектаметру = 1 гектару = $2^1/_2$ экрамъ приблизительно.

100 кв. гектометровъ = 1 кв. километру = $^3/_8$ кв. мили приблиз.

Таблица англійской системы.

144 кв. дюйма = 1 кв. футу (кв. ф.) = $9^1/_3$ кв. децм. приблиз.

9 кв. футовъ = 1 кв. ярду.

$30^1/_4$ кв. ярдовъ = $272^1/_4$ кв. фут. = 1 кв. роду.

160 кв. родовъ = 1 акру.

640 акровъ = 1 кв. милѣ.

1. Площадь прямоугольника. Просмотрите объясненіе относительно площади прямоугольниковъ на стр. 36.

1. Возьмите кусокъ бумаги 7 см. длиною и 4 см. шириною и имѣющій форму прямоугольника. Сдѣлайте чертежъ его въ настоящую величину; проведите линіи такъ, чтобы разбить его на кв. сантиметры; затѣмъ сосчитайте квадратики, надписывая внутри каждаго изъ нихъ его номеръ, начиная съ верхняго.

2. Начертите прямоугольникъ 8 см. длиною и 2 см. 5 мм. шириною и проведите линіи, раздѣляющія его на квадратики по 1 кв. см. и на части квадратиковъ. Сколько содержитъ этотъ прямоугольникъ квадратныхъ сантиметровъ? Затѣмъ разрѣжьте ножницами прямо-

угольникъ на части, которыя вы намѣтили, сложите вмѣстѣ части квадратиковъ и посмотрите, сколько выйдетъ всего квадратиковъ. Будетъ ли это то же самое число, которое вы нашли раньше вычисленіемъ?

3. Продѣлайте то же самое съ прямоугольникомъ въ 8 д. длиною и $1^1/_4$ д. шириною. Сколько частей квадратиковъ вы должны сложить вмѣстѣ, чтобы составить полный квадратикъ?

4. Продѣлайте то же самое съ прямоугольникомъ $3^1/_2$ д. длиною и $2^1/_2$ д. шириною. Въ этомъ случаѣ одинъ квадратикъ будетъ неполный.

5. Доска, въ формѣ прямоугольника, имѣетъ въ длину 30 футовъ, а въ ширину 20 дюймовъ. Какую бы вы выбрали самую подходящую единицу для вычисленія ея площади?

Сдѣлайте чертежъ этой доски по масштабу $^1/_{40}$, т.-е. сдѣлайте каждую сторону прямоугольника въ 40 разъ меньше соотвѣтствующей стороны доски. Затѣмъ высчитайте площадь доски, не чертя линій, дѣлящихъ фигуру на единицы. Дайте отвѣтъ и въ квадрат. футахъ и въ квадр. дюймахъ. Результатъ измѣняетъ или подтверждаетъ ли ваше мнѣніе относительно самой удобной единицы, которую слѣдуетъ употребить въ этомъ случаѣ?

6. Доска, въ формѣ прямоугольника, имѣетъ въ длину 1 метръ 5 дециметровъ, а въ ширину 7 дециметровъ. Сдѣлайте чертежъ доски по масштабу $^1/_{100}$ и высчитайте площадь доски въ квадратныхъ метрахъ и кв. дециметрахъ. Какова площадь доски сравнительно съ площадью вашего чертежа?

7. Площадка для игры въ крикетъ имѣетъ 70 ярдовъ въ длину и 50 ярдовъ въ ширину. Начертите планъ площадки по масштабу 20 ярдовъ въ 1 дюймѣ, т.-е. представьте на вашемъ планѣ длину въ 20 ярдовъ однимъ дюймомъ.

Какая площадь вашего плана?

Какая площадь площадки?

8. Землемѣръ нашелъ, что участокъ земли простирается къ сѣверо-востоку на 150 метровъ, затѣмъ къ сѣверо-западу на 60 метровъ, потомъ къ юго-западу на 150 метровъ и наконецъ къ юго-востоку на 60 метровъ и что участокъ этотъ прямоугольный. Начертите планъ участка по масштабу $^1/_{1000}$ и найдите площадь плана и участка.

9. Площадка для игры въ теннисъ прямоугольной формы имѣетъ въ длину 78 ф. и въ ширину 27 ф. Эта площадка раздѣлена на 8 частей слѣдующимъ образомъ. Сѣтка пересѣкаетъ длинныя стороны въ ихъ среднихъ точкахъ. Средняя линія соединяетъ среднія точки короткихъ сторонъ. Еще двѣ вспомогательныхъ линіи идутъ параллельно короткимъ сторонамъ площадки и каждая на 21 ф. отъ сѣтки. Сдѣлайте чертежъ площадки по масштабу $^1/_{216}$, т.-е. представьте длину въ 18 футовъ однимъ дюймомъ. Потомъ опредѣлите:

(a) Площадь вашего плана.
(b) Площади восьми отдѣленій вашего плана.
(c) Площадь площадки.
(d) Площадь каждаго изъ 8 отдѣленій площадки.

10. Другая площадка для игры той же самой длины, какъ и въ предыдущей задачѣ, но вмѣсто 27 имѣетъ 36 ф. въ ширину. Насколько отъ этого увеличивается ея площадка?

2. **Площадь параллелограмма.** Площадь параллелограмма равна произведенію основанія на высоту.

За *основаніе* можетъ быть принята любая сторона параллелограмма.

Высота же есть перпендикулярное разстояніе между основаніемъ и противоположной стороной.

Такимъ образомъ въ ABCD AB есть основаніе, а DP высота.

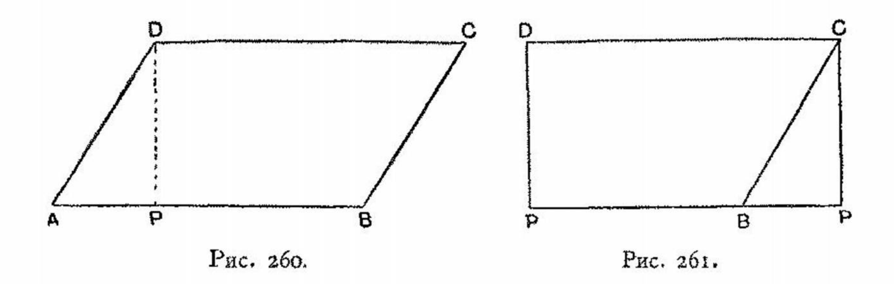


Рис. 260. Рис. 261.

Начертите аккуратно на бумагѣ параллелограммъ ABCD съ какими-нибудь подходящими сторонами и углами. Возьмите AB за основаніе и проведите высоту DP.

Вырѣжьте параллелограммъ изъ бумаги. Затѣмъ отрѣжьте треугольникъ ADP и приложите его съ другой стороны фигуры, какъ треугольникъ BCP'.

Вы можете склеить обѣ части вмѣстѣ полоской бумаги съ задней стороны.

Вы превратили такимъ образомъ параллелограммъ въ прямоугольникъ, сохранившій то же самое основаніе и ту же высоту.

Такъ какъ площадь прямоугольника есть произведеніе основанія на высоту, то это есть также площадь и параллелограмма.

Начертите слѣдующіе параллелограммы, придерживаясь даннаго описанія, и опредѣлите ихъ площади. Надпишите

величину данныхъ частей и площади внутри и около чертежей.

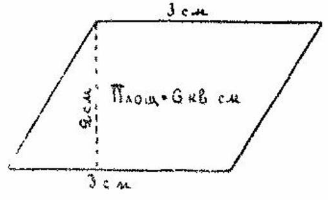


Рис. 262.

1. Двѣ противоположныя стороны каждая по 3 см. длиною на 2 см. другъ отъ друга.

2. Двѣ противоположныя стороны каждая по 4 см. длиною и 1 см. другъ отъ друга.

3. Двѣ противоположныя стороны каждая по 3 см. длиною и 3 см. другъ отъ друга

4. Двѣ противоположныя стороны каждая по 2 см. длиною и 4 см. другъ отъ друга.

5. Основаніе 2 см. 5 мм. длиною, разстояніе отъ противоположной стороны 1 см.

6. Основаніе 4 см. длиною, разстояніе отъ противоположной стороны 2 см. 4 мм.

7. Основаніе 1 см. 8 мм. длиною, разстояніе отъ противоположной стороны 3 см. 2 мм.

8. Двѣ стороны каждая по 8 см. длиною, двѣ стороны каждая по 4 см. длиною, два угла по 45^0 и два угла по 135^0.

9. Двѣ стороны каждая по 6 см., двѣ стороны каждая по 4 см., два угла по 60^0 и два угла по 120^0.

10. Двѣ стороны въ 6 см. 4 мм. и въ 4 см. образуютъ уголъ другъ съ другомъ въ 150^0.

11. Стороны въ 3 см. и 8 см. наклонены другъ къ другу подъ угломъ въ 80^0.

12. Землемѣръ отмѣтилъ на землѣ линію, протягивающуюся прямо на востокъ, длиною 8 метровъ. Отъ восточнаго конца онъ провелъ линію 5 м. длиною, протягивающуюся на сѣверо-западъ и потому образующую съ первою линіею уголъ въ 45^0. Отъ сѣвернаго конца второй линіи онъ провелъ линію прямо на западъ, 8 метр. длиною. Наконецъ онъ провелъ линію, соединяющую западные концы первой и третьей линіи.

Начертите планъ вырѣзанной земли (масшт. $\frac{1}{100}$) и найдите.

a) Направленіе, въ которомъ идетъ каждая линія.

b) Углы, которые образуетъ четвертая линія съ первой и третьей.

c) Длину четырехъ линій, какъ онѣ представлены на вашемъ планѣ

d) Дѣйствительную длину линій на землѣ.

e) Какъ надо назвать начерченную вами фигуру?

f) Найдите площадь вашего плана.

g) Найдите дѣйствительную площадь земли.

3) **Площадь треугольника.** Площадь треугольника равна половины произведенія его основанія на высоту.

Основаніе есть одна изъ его сторонъ.

Высота есть перпендикулярное разстояніе отъ основанія до вершины противоположнаго угла.

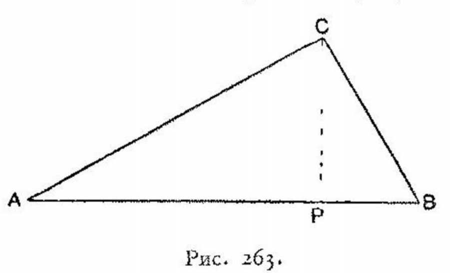


Рис. 263.

Такимъ образомъ въ треугольникѣ ABC, AB есть основаніе, а CP высота.

Начертите на бумагѣ параллелограммъ ABCD съ какими-нибудь сторонами и углами. Взявши AB за основаніе, проведите высоту DP. Проведите діагональ DB.

Вырѣжьте параллелограммъ изъ бумаги и разрѣжьте его на двѣ части по діагонали DB.

Затѣмъ треугольникъ DBC поверните вверхъ вершиной B и наложите его на треугольникъ ADB и вы увидите, что обѣ части равны и что треугольникъ есть половина параллелограмма.

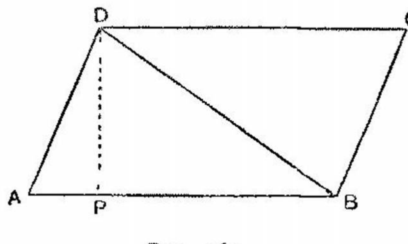


Рис. 264.

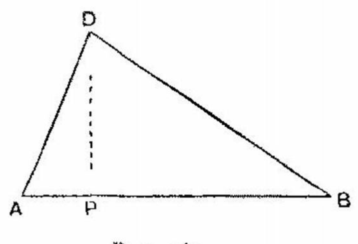


Рис. 265.

Такъ какъ площадь параллелограмма равна произведенію основанія на высоту, то площадь треугольника, который составляетъ половину параллелограмма, есть половина произведенія его собственнаго основанія на высоту.

Постройте слѣдующіе треугольники и опредѣлите ихъ площадь, надписывая размѣры на чертежахъ:

1. Основаніе 8 см., высота 4 см.
2. „ 4 „ „ 8 „
3. „ 5 „ „ 3 „
4 „ 3 „ „ 5 „

5. Равнобедренный прямоугольный треугольникъ, котораго равныя стороны по 5 см. длиною каждая.

6. Прямоугольный треугольникъ, у котораго катеты 5 см. и 3 см.

7. Равнобедренный треугольникъ, у котораго равные углы по 15° и равныя стороны котораго по 5 см. каждая.

8. Начертите прямоугольный треугольникъ. Затѣмъ проведите еще двѣ линіи такъ:

a) чтобы образовался прямоугольникъ,

b) чтобы образовался параллелограммъ.

9. Начертите равнобедренный треугольникъ. Затѣмъ проведите еще двѣ линіи такъ:

a) чтобы образовался ромбъ,

b) чтобы образовался параллелограммъ.

10. Начертите равнобедренный прямоугольный треугольникъ. Затѣмъ проведите еще двѣ линіи такъ:

a) чтобы образовался квадратъ,

b) чтобы образовался ромбъ.

4. **Площадь трапеціи.** Площадь трапеціи равна высотѣ, умноженной на половину суммы ея параллельныхъ сторонъ.

Высота трапеціи есть перпендикулярное разстояніе между параллельными сторонами.

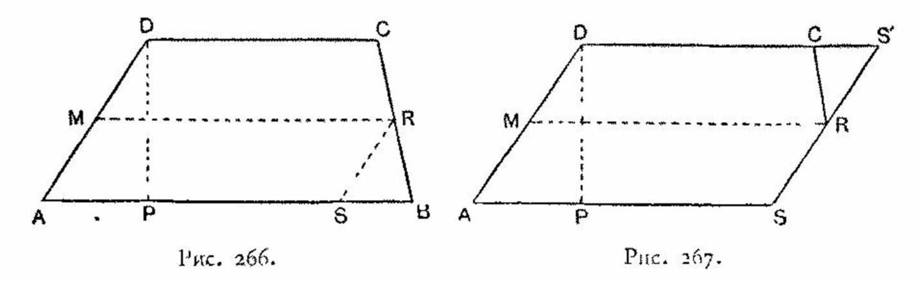


Рис. 266. Рис. 267.

Такимъ образомъ въ трапеціи ABCD, AB и CD суть параллельныя стороны, а DP есть высота. Параллельныя стороны называются также *основаніями*.

Начертите на бумагѣ трапецію ABCD, у которой AB и CD будуть параллельныя стороны. Проведите MR, соединяющую среднія точки AD и BC. Отложите по AB разстояніе AS, равное линіи MR. Проведите SR.

Вырѣжьте трапецію изъ бумаги; отрѣжьте треугольникъ SBR и помѣстите его въ положеніе S′CR; склейте обѣ части вмѣстѣ, такъ, чтобъ получился параллелограммъ.

Такимъ образомъ вы превратили трапецію въ параллелограммъ.

Двѣ параллельныя стороны трапецій стали равны сторо-

намъ параллелограмма, и половина суммы параллельныхъ сторонъ равна AS, основанію параллелограмма.

Высота DP осталась безъ измѣненія.

Теперь, такъ какъ площадь параллелограмма равна произведенію высоты на основаніе, то площадь трапеціи есть произведеніе ея высоты на половину суммы ея основаній.

Начертите слѣдующія трапеціи и опредѣлите ихъ площади, надписывая размѣры на чертежахъ:

1. Основанія 4 см. и 2 см.; высота 3 см.
2. „ 3 см. 5 мм. и 2 см. 7 мм.; высота 2 см. 4 мм.
3. „ 5 2 „ и 3 6 „ 1 „

4. Стороны и углы трапеціи, взятые по порядку, такіе: 7 см., 20°, 1 см. 8 мм. 160°, 4 см. 6 мм. 140°, 9 мм. 40°.

5. Передняя грань пьедестала статуи имѣетъ форму трапеціи. Параллельныя стороны трапеціи имѣютъ 6 метр. и 4 метра въ длину, боковыя стороны по 2 метра длины. Углы при концахъ самой длинной стороны каждый по 60°. Начертите планы трапеціи по масштабу $^1/_{100}$ и высчитайте площадь дѣйствительной фигуры.

6. Участокъ земли имѣетъ форму трапеціи. Длинное основаніе 48 м. въ длину и образуетъ уголъ въ 30° съ каждой изъ боковыхъ сторонъ, имѣющихъ каждая по 24 м.

Начертите планы земли по масштабу $^1/_{100}$ и опредѣлите:

a) Длину четвертой стороны вашего плана.

b) Площадь участка въ натурѣ.

7. Мальчики, которые опредѣляли размѣры подставки, имѣвшей видъ усѣченной перамиды (рис. 268) нашли, что боковая высота ея

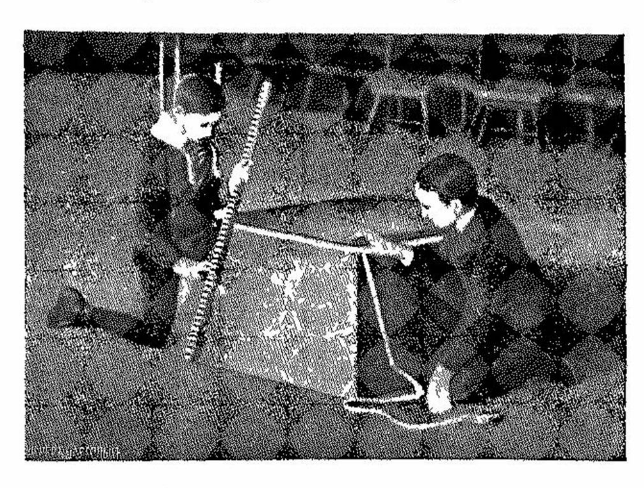


Рис. 268. Измѣреніе поверхности подставки.

1 ф. 8 д. со всѣхъ сторонъ. Периметръ нижняго основанія 14 ф., а периметръ верхняго основанія 11 ф. Основанія прямоугольны. Одна сторона верхняго основанія—3 ф.

Сколько квадратныхъ футовъ содержится въ боковой поверхности и въ верхнемъ основаніи вмѣстѣ?

8. Верхній край водоема представляетъ форму трапеціи Верхняя сторона 20 м., а нижняя 30 м. длины; разстояніе между ними 5 м. Другія двѣ стороны образуютъ съ нижней стороной углы въ 45⁰ каждая.

Сдѣлайте чертежъ, сами назначивши масштабъ, и опредѣлите:

a) Длину двухъ непараллельныхъ сторонъ.

b) Углы, которые эти стороны образуютъ съ верхнимъ основаніемъ.

c) Площадь водоема.

5. **Площадь многоугольника.** Площадь многоугольника можетъ быть вычислена при помощи прозрачной бумаги, разлинованной на маленькіе квадратики, площадь которыхъ заранѣе уже извѣстна. Наложите бумагу на многоугольникъ, сосчитайте число цѣлыхъ квадратиковъ, которые помѣщаются внутри периметра, и опредѣлите величину частей квадратиковъ. Общая сумма будетъ площадью многоугольника.

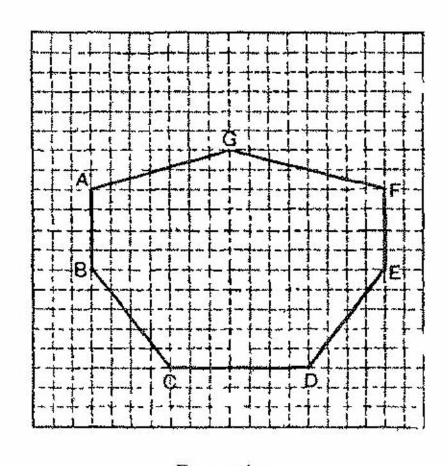


Рис. 269

Бумага на рисункѣ разлинована на квадратики со стороною въ $^1/_{10}$ дюйма длиною.

Какая площадь одного квадратика?

Видите ли вы, что BC есть діагональ какого-то прямоугольника? И что AG есть діагональ другого прямоугольника? Если да, то вы можете найти вполнѣ точно, чему равняется сумма частей квадратиковъ, которыя прилегаютъ къ этимъ линіямъ.

Чему равняется площадь всего многоугольника ABCDEFG?

Этотъ способъ употребляется для нахожденія приблизительной величины площади какой-нибудь мѣстности, губерніи и т. п. по картѣ.

Но, кромѣ этого, существуютъ еще другіе различные способы опредѣленія площади многоугольниковъ съ большей точностью.

1-й способъ. Многоугольникъ можетъ быть разбитъ на треугольники, площади которыхъ находятся отдѣльно и потомъ складываются.

Основаніями треугольниковъ служатъ діагонали, проведенныя изъ вершины многоугольника: высоты есть перпендикуляры, опущенные на діагонали изъ противоположныхъ вершинъ треугольниковъ.

1. Опредѣлите площадь многоугольника ABCDEF по слѣдующимъ измѣреніямъ:

AC = 11 метровъ, AD = 16 м., AE = 11 м.; BX = 2 м.; CY = 4 м; EZ = 6 м.; FW = 4 м.

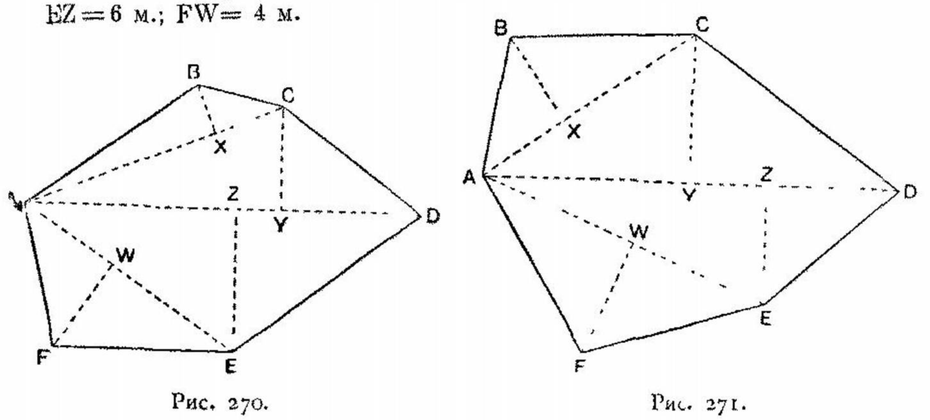


Рис. 270. Рис. 271.

2. Опредѣлите площадь многоугольника ABCDEF по слѣдующимъ измѣреніямъ:

AC = 10 метровъ; AD = 17 м.; AE = 13 м; BX = 4 м.; CY = 6 м.; EZ = 6 м.; FW = 5 м.

3. Опредѣлите площадь многоугольника ABCDEF (рис. 272) по слѣдующимъ измѣреніямъ:

AC = 10 метровъ; AD = 11 м.; AE = 9 м.; AF = 8 м.; BX = 5 м.; CY = 3 м.; EZ = 5 м.; FW = 5 м., CV = 2 м.

2-й способъ. Площадь многоугольника можетъ быть найдена, если мы проведемъ самую длинную діагональ его и опустимъ на нее перпендикуляры изъ вершины многоугольника. Многоугольникъ раздѣляется такимъ образомъ на трапеціи, прямоугольники или прямоугольные треугольники,

площади которыхъ находятся отдѣльно и потомъ складываются.

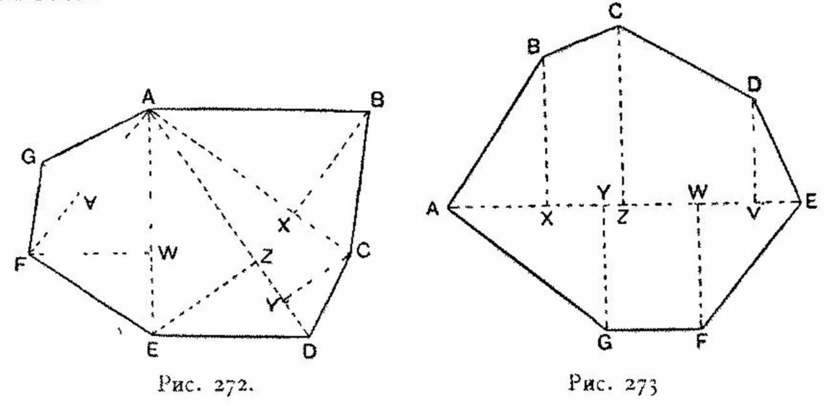


Рис. 272. Рис. 273

Опредѣлите площадь многоугольника ABCDEFG (рис. 273) по слѣдующимъ измѣреніямъ:

BX = 6 метровъ; CZ = 7 м.; DV = 4 м; GY = 5 м; FW = 5 м. AX = 4 м.; XY = 2 м.; YZ = 1 м; ZW = 3 м; WV = 2 м.; VE = 2 м.

3-й способъ. Площадь многоугольника можетъ быть найдена способомъ, обыкновенно употребляемымъ землемѣрами.

Линія LN, называемая „основной линіей“, проводится черезъ одну изъ вершинъ многоугольника и на нее опускаются перпендикуляры изъ остальныхъ вершинъ, и такимъ образомъ получаются трапеціи, прямоугольники или прямоугольные треугольники, площади которыхъ находятся отдѣльно и потомъ складываются. Затѣмъ изъ этой суммы вычитается площадь тѣхъ частей, которыя лежатъ внѣ многоугольника. На прилагаемомъ чертежѣ 274 основная линія LN проведена перпендикулярно къ

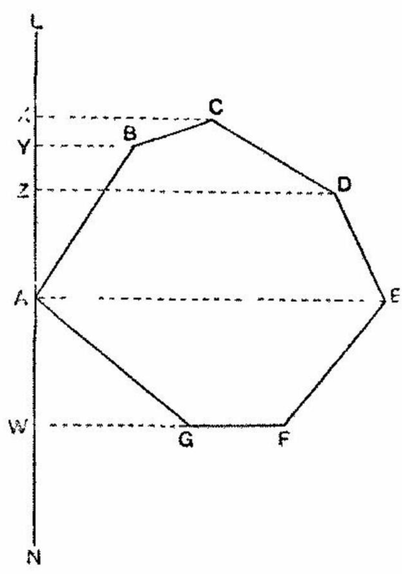


Рис. 274

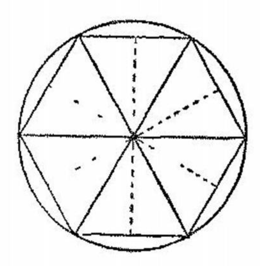
діагонали AE. Части, которыя должны быть вычтены изъ всей площади, состоятъ изъ трапеціи и двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ.

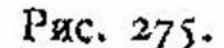
Опредѣлите площадь многоугольника ABCDEFG по слѣдующимъ измѣреніямъ:

CX = 7 мотровъ; BY = 4 м, DZ = 12 м, EA = 14 м; FW = 10 м; GW = 6 м.; XY = 1 м.; YZ = 2 м; ZA = 4 м.; AW = 5 м.

Сравните результатъ съ результатомъ предыдущей задачи, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ данъ одинъ и тотъ же многоугольникъ.

6. **Площадь круга.** Площадь круга можетъ быть найдена, если вычислить длину окружности, умножить ее на длину радіуса и раздѣлить произведеніе на 2.




Рис. 275.

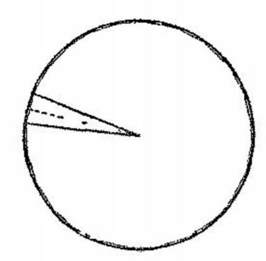


Рис 276.

Это правило основано на томъ, что площадь круга можно разсматривать какъ бы равной суммѣ площадей нѣкотораго числа равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, основанія которыхъ суть хорды и вершины которыхъ, противоположныя хордамъ, сходятся въ центрѣ круга.

Если есть только шесть такихъ треугольниковъ, составляющихъ шестиугольникъ, какъ на лѣвомъ чертежѣ, то будетъ значительная разница между площадью круга и площадью этого многоугольника. Но если число треугольниковъ возрастетъ только до двадцати четырехъ, какъ на чертежѣ 276, то площадь многоугольника очень приблизится къ площади круга. Можно также замѣтить, что высоты треугольниковъ на правомъ рисункѣ почти равны каждая радіусу круга; и сумма основаній почти равна окружности круга. Если число треугольниковъ будетъ возрастать дальше, то они образуютъ многоугольникъ, который съ трудомъ можно будетъ отличить отъ круга, хотя все-таки всегда будетъ нѣкоторая разница.

Сумма же площадей треугольниковъ можетъ быть найдена умноженіемъ суммы ихъ основаній на ихъ высоту и раздѣленіемъ произведенія на 2.

Такъ же и площадь круга можетъ быть найдена умноженіемъ его окружности на радіусъ и раздѣленіемъ произведенія на 2

Предположите, что радіусъ окружности равенъ 4 см.

Тогда окружность $= 2 \times 3^1/_7 \times 4 = 25^1/_7$ см.

А площадь $= 4 \times 25^1/_7 : 2 = 50^2/_7$ кв. см

Опредѣлите площади слѣдующихъ круговъ, принимая π равнымъ $3^1/_7$:

1. Радіусъ = 7 см.		6 Діаметръ = 10 см.	
2. „ – 3 „		7. „ = 2 „	
3. „ — 14 „		8. „ = 12 „	
4. „ = 1 д.		9. „ = 4 д.	
5. „ = 2 „		10 „ = 8 „	

7. **Секторъ.** Секторъ есть часть круга, заключенная между двумя радіусами и дугой, какъ AOB.

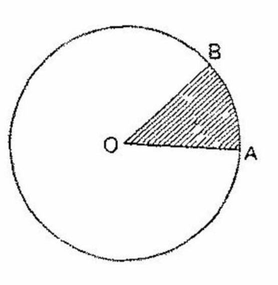


Рис. 277.

Секторъ часто обозначается величиной угла между двумя его радіусами; такъ, если уголъ AOB есть 45°, то секторъ называется „секторомъ 45 градусовъ“.

Секторъ какого-нибудь требуемаго размѣра строится вычерчиваніемъ двухъ радіусовъ, образующихъ уголъ указанной величины.

Постройте слѣдующіе секторы:

1.	45°, радіусъ 2 см		6.	30°, радіусъ 1	дюймъ
2	120°, „	3 „	7.	60°, „ 2	„
3	90°, „	4 „	8.	45°, „ $1^1/_2$	„
4.	100°, „	2 „	9.	90°, „ 2	„
5	20°, „	4 „	10.	120°, „ $1^1/_4$	„

Найти площадь сектора:

(a) Если извѣстна длина радіуса и длина дуги.

Какъ и цѣлый кругъ, секторъ можно разсматривать состоящимъ изъ безчисленнаго числа треугольниковъ, высота которыхъ есть радіусъ, а сумма основаній есть дуга.

Слѣдовательно, площадь сектора можетъ быть найдена умноженіемъ длины дуги на длину радіуса и дѣленіемъ произведенія на 2.

Такъ, если радіусъ есть $1^1/_2$ см., а дуга 2 см., то площадь сектора будетъ $^3/_2 \times 2 : 2 = ^3/_2$ кв. см.

(в) Если извѣстенъ радіусъ и уголъ сектора.

Пусть радіусъ $1^1/_2$ см. и уголъ 50^0.

Секторъ есть $^{50}/_{360}$ или $^5/_{36}$ цѣлаго круга.

Площадь круга есть $^9/_4\ \pi$ или $7^1/_{14}$.

Слѣдовательно, площадь сектора есть $^5/_{36} \times 7^1/_{14} = ^5/_{36} \times ^{99}/_{14} = ^{55}/_{56}$ кв. см.

(с) Если извѣстна длина радіуса и число градусовъ въ дугѣ.

Такъ какъ дуга и уголъ, образованный радіусами, имѣютъ одинаковое число градусовъ, то способъ нахожденія площади тотъ же самый, что и въ случаѣ (в).

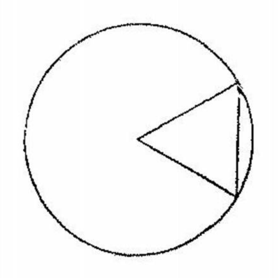
Опредѣлите площади слѣдующихъ секторовъ:

11 Радіусъ 4 см., дуга 3 см.	16. Радіусъ 2 см., уголъ 30^0.
12 „ 5 „	17. „ 4 „ „ 45^0.
13. „ 2 „	18. „ 7 „ дуга 90^0
14 „ 3 „	19. „ 3 „ „ 100^0.
15. „ 7 „ уголъ 60^0.	20. „ 1 „ „ 120^0.

8. Сегментъ. Сегментъ круга есть часть круга, заключенная между хордой и ея дугой.

Слово сегментъ означаетъ „отрѣзокъ“.

Величина сегмента часто опредѣляется числомъ градусовъ въ его дугѣ; такъ, если дуга въ 60^0, то сегментъ называется „сегментомъ въ 60 градусовъ“.


Рис. 278.

Площадь сегмента можетъ быть найдена, если провести радіусы въ концы дуги и вычесть площадь треугольника изъ площади такимъ образомъ полученнаго сектора.

Постройте слѣдующіе сегменты:

1. Радіусъ 2 см. дуга 80^0.	4. Радіусъ 1 дюймъ, дуга 90^0.
2. „ 3 „ „ 90^0.	5. „ $1^1/_2$ „ „ 75^0.
3. „ 25 „ „ 120^0.	6. „ 2 „ „ 60^0.

Опредѣлите площадь слѣдующихъ сегментовъ:

7 Радіусъ 2 см, дуга 90^0.	10. Радіусъ 1 дюймъ, дуга 90^0.
8. „ 3 „ „ 90^0	11. „ 2 „ „ 90^0.
9 Діаметръ 4 „ „ 90^0	12 Діаметръ 4 „ „ 90^0.

9. **Поверхность шара.** Поверхность шара вполнѣ точно равна площади четырехъ круговъ того же самаго діаметра, какъ и самъ шаръ (см. стр. 102).

1. Какова поверхность шара, діаметръ котораго 7 см.?
2. Какова поверхность шара, радіусъ котораго 5 см.?
3. Діаметръ луны имѣетъ около 2160 миль.

Сколько квадратныхъ миль заключается въ ея поверхности?

4. Сколько будетъ стоить выкрасить крышу, имѣющую видъ полушара съ діаметромъ въ 44 фута, если платить по 4 коп. за каждый квадратный футъ?
5. Какова поверхность самаго большого шара, какой можно вырѣзать изъ деревяннаго куба, ребро котораго равно 1 дециметру?
6 Какой длины діаметръ шара, окружность котораго равна 22 см.?
7. Сколько квадратныхъ дюймовъ кожи нужно взять, чтобы покрыть мячъ, окружность котораго равна 9 дюймамъ?
8. Какова поверхность шара сравнительно съ боковой поверхностью цилиндра, который какъ разъ заключаетъ въ себѣ шаръ?

ГЛАВА XXVII.

Объемы.

Объемъ. Просмотрите то, что сказано объ объемѣ на стр. 22.

Для справокъ.

При измѣреніи объемовъ въ Америкѣ употребляются двѣ системы,—метрическая и англійская.

Таблица метрической системы.

1000 куб. миллиметровъ (куб. мм.) = 1 куб. сантиметру = $^3/_{50}$ куб. дюйма приблизительно.

1000 куб. сантиметровъ (куб. см.) = 1 куб. дециметру = $^1/_{30}$ куб. фута приблизительно.

1000 куб. дециметровъ = 1 куб. метру = 1 стеру = $1^3/_{10}$ куб. ярду.

Таблица англійской системы.

1728 куб. дюймовъ = 1 куб. футу = 28,3 куб. децим. приблизительно.
27 куб. футовъ = 1 куб. ярду = 0,76 куб. метровъ приблизительно.
128 куб. футовъ = 1 корду (сажень дровъ).

1. **Объемъ куба.** Просмотрите то, что было сказано объ объемѣ куба на стр. 25—26.

1. Какой обьемъ куба, ребро котораго 5 см.?

2. Сколько кубовъ съ ребромъ въ 2 см. можно сдѣлать изъ куба съ ребромъ въ 10 см?

3 Достаточно ли было бы того же самаго количества бумаги для покрытія поверхности какъ первоначальнаго куба, такъ и маленькихъ кубиковъ, о которыхъ упоминалось въ предыдущемъ вопросѣ? Если нѣтъ, то во сколько разъ больше въ одномъ случаѣ, чѣмъ въ другомъ?

4. Сколько кубовъ, съ ребромъ въ 2 дюйма, можно покрыть кускомъ бумаги въ 2 кв. фута.

5. Если у васъ есть кубическій кусокъ дерева съ ребромъ въ 1 дюймъ и если желательно вырѣзать изъ него сколь возможно больше кубиковъ съ ребромъ въ 3 см, а остатокъ употребить на кубы съ ребромъ въ 2 см., то сколько вы получите кубовъ каждаго рода, такъ чтобы не было никакого остатка?

6 Въ предыдущемъ случаѣ, если бы вы начали вырѣзать всѣ кубы съ ребрами въ 2 см., сколько бы вы ихъ получили? Если бы вы затѣмъ употребили остатокъ куска на то, чтобы вырѣзать изъ него возможно большие кубы, то какой длины были бы ихъ стороны и сколько бы вы получили такихъ кубовъ?

7. Какой объемъ будетъ больше: пяти кубическихъ ящиковъ съ ребрами по 6 дюймовъ или 6 кубическихъ ящиковъ съ ребрами по 5 дюймовъ?

8. Если у васъ есть два куба съ ребрами по 4 дюйма и шесть кубовъ съ ребрами по 2 дюйма, то сколько еще нужно вамъ меньшихъ кубовъ, чтобы, сложивши все вмѣстѣ, образовать одинъ кубъ съ ребромъ въ 6 дюймовъ?

9. Если у васъ есть кубическій ящикъ, внутреннія измѣренія котораго каждое по 23 дюйма, и если желательно наполнить его сколь возможно полнѣе кубиками одинаковой величины, имѣющими ребра по 3 или по 4 дюйма, то при какомъ размѣрѣ кубиковъ останется наименьшее пустое пространство?

2. **Объемъ параллелепипеда.** Просмотрите то, что сказано объ объемѣ параллелепипеда на стр. 37—38.

1. Сколько кубическихъ дециметровъ заключается въ ящикѣ, у котораго длина 1 дцм., ширина 2 дцм. и глубина 4 дцм. 5 см.? (См. рис. 279)



Рис. 279 Измѣреніе объема ящика

2 Если діаграмма на стр 28 будетъ сложена такъ, чтобы образовался параллелепипедъ, то какой будетъ его объемъ?

3 Сколько нужно бумаги, чтобы покрыть параллелепипедъ 6 см $\times$ 3 см. $\times$ 2 см.?

4. Могутъ ли быть кирпичи 8 д. $\times$ 4 д. $\times$ 2 д. сложены такъ, чтобы образовать кубъ съ ребромъ въ 2 фута? Если да, то сколько надо ихъ взять?

5 Сколько кубовъ съ ребромъ въ 5 см. можетъ быть отлито изъ мѣдной болванки въ 25 см. $\times$ 15 см. $\times$ 8 см.?

Если бы упомянутые въ предыдущемъ вопросѣ кубы были бы вырѣзаны изъ куска дерева той же самой величины, какъ и мѣдь, и поэтому нѣкоторое количество матеріала было бы не использовано, то сколько бы кубовъ можно было получить?

7 Сколько кирпичей въ 8 д $\times$ 4 д. $\times$ 2 д нужно для постройки стѣны въ 80 фут. длиною, 6 фут. высотою и 8 д. толщиною?

8. Если бы стѣна, упоминаемая въ предыдущемъ вопросѣ, принадлежала строенію, имѣющему въ ширину 30 фут., то сколько бы кирпичей нужно бы было для всѣхъ четырехъ стѣнъ?

9. Если у насъ есть кусокъ дерева въ 18 см. $\times$ 12 см. $\times$ 8 см. и желательно разрѣзать его на кубы съ ребрами по 3 см. или на параллелепипеды 6 см $\times$ 4 см. $\times$ 2 см, то что бы вы выбрали, чтобы потерять возможно меньше матеріала?

10 Какой объемъ будетъ больше: извѣстнаго ли числа ящиковъ каждый по 7 д $\times$ 5 д. $\times$ 3 д., или половина такого же числа ящиковъ 14 д. $\times$ 10 д $\times$ 6 д?

11 Сколько кубическихъ дециметровъ заключается въ ящикѣ, который имѣетъ 1 м 2 дцм. 5 см. въ длину, 3 дцм 5 см въ ширину и 43 см въ глубину.

3. **Объемъ призмы.** Просмотрите то, что было сказано о призмахъ на стр. 39—41. Тамъ говорилось, что призма имѣетъ треугольное основаніе, равное половинѣ квадратной грани куба, и высоту, равную ребру куба. Объемъ такой призмы какъ разъ равенъ половинѣ объема куба; т.-е. объемъ ея *равенъ площади треугольнаго основанія, умноженной на высоту.*

То же самое вѣрно относительно всякой призмы: объемъ всякой призмы равенъ площади основанія, умноженной на высоту. Основаніе призмы есть многоугольникъ, площадь котораго можетъ быть найдена однимъ изъ способовъ, указанныхъ на стр. 171—174; если призма есть прямая призма, то всѣ боковыя грани ея прямоугольники и высота такой призмы равна длинѣ бокового ребра.

1. Если діаграмма на стр. 39 будетъ сложена такъ, что образуетъ призму, то какой будетъ ея объемъ?

2. Призма, описанная на стр. 109 (рис. 168 и 169), имѣетъ основаніемъ пятиугольникъ, площадь котораго около 10,75 кв. см.

Какой объемъ этой призмы?

Какая общая площадь ея поверхности?

3. Найдите объемъ и площадь всей поверхности прямой шестиугольной призмы, каждое ребро которой имѣетъ въ длину 5 см., а площадь основанія 65 кв. с.

4. Найдите объемъ и площадь всей поверхности прямой призмы, высота которой 10 см. и основаніе которой есть прямоугольный равнобедренный треугольникъ съ равными сторонами по 5 см. и длинной стороной въ 7,1 см.

5. Найдите боковую поверхность, цѣлую поверхность и объемъ прямой призмы, боковое ребро которой 8 д., а основаніе есть равносторонній треугольникъ со стороною въ 2 дюйма.

4. **Объемъ цилиндра.** Просмотрите опытъ съ объемомъ цилиндра на стр. 92.

Тамъ описанъ цилиндръ, имѣющій основаніемъ кругъ, діаметръ котораго равенъ ребру куба, съ которымъ цилиндръ сравнивается; и высота цилиндра равна ребру куба. Было найдено, что объемъ цилиндра равняется приблизительно тремъ четвертямъ объема куба.

Площадь основанія цилиндра равняется приблизительно тремъ четвертямъ основанія куба, т.-е. кругъ равенъ приблизительно тремъ четвертямъ квадрата, построеннаго на его

діаметрѣ; или, такъ какъ квадратъ на діаметрѣ въ четыре раза больше, чѣмъ квадратъ на радіусѣ, то площадь круга приблизительно втрое больше, чѣмъ квадратъ на радіусѣ.

При болѣе точныхъ измѣреніяхъ оказалось бы, что площадь круга равняется приблизительно все-таки $^{11}/_{14}$ площади

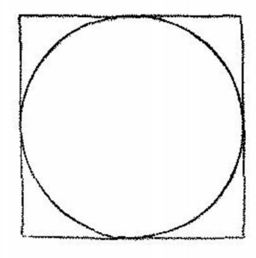


Рис. 280.

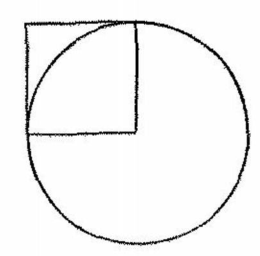


Рис. 281.

квадрата на діаметрѣ круга или $^{22}/_{7}$ квадрата на его радіусѣ.

Такимъ образомъ существуютъ четыре выраженія, которыя могутъ быть употреблены для круга:

1. $^{3}/_{4}$ квадрата на діаметрѣ.
2. 3 квадрата на радіусѣ.
3. $^{11}/_{14}$ квадрата на діаметрѣ.
4. $^{22}/_{7}$ квадрата на радіусѣ.

Первыя два достаточны для грубыхъ вычисленій, а другія два достаточно точны для вычисленій, которыя вамъ нужно будетъ дѣлать, проходя начальную геометрію.

Объемъ цилиндра равенъ площади основанія, умноженной на высоту.

Если прямая линія, соединяющая центры основаній цилиндра, перпендикулярна къ основаніямъ, то цилиндръ называется *прямымъ*.

Въ этомъ случаѣ боковая (или кривая, огибающая) поверхность, какъ было показано на стр. 90, образуется прямоугольникомъ, имѣющимъ своими боками окружность основанія и высоту цилиндра. Слѣдовательно, площадь боковой

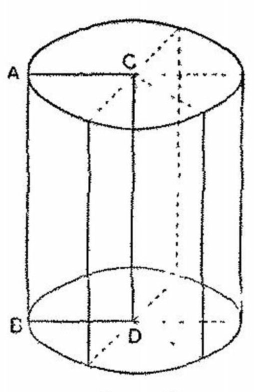


Рис. 282.

поверхности цилиндра равна окружности основанія, умноженной на высоту цилиндра.

Длину окружности можно принимать или въ 3 или въ $3^1/_7$ раза больше длины діаметра, сообразно со степенью требуемой точности.

1. Найти въ *кубическихъ сантиметрахъ объемъ цилиндра, описаннаго* на стр. 90, имѣющаго діаметромъ и высотою 5 см., беря болѣе точную величину площади основанія.

2. Радіусъ основанія цилиндра 14 см., а высота его 10 см. Найти сначала грубо, а потомъ болѣе точно:

а) Площадь основанія.

в) Площадь боковой поверхности.

с) Площадь всей поверхности.

д) Объемъ цилиндра.

3. Если у васъ есть кусокъ дерева въ формѣ прямого *параллелепипеда, описаннаго* на стр. 28 (4 д. $\times$ 3 д. $\times$ 2 д.), какой будетъ объемъ, по грубому вычисленію, наибольшихъ цилиндровъ, которые можно выточить изъ него, принимая за основаніе:



Рис. 283. Опредѣленіе объема кобылы.

а) *Наибольшую грань* куска.

в) Другую большую грань.

с) Наименьшую грань.

4. Сколько будетъ *стоить выкрасить поверхность* трехъ цилиндровъ, указанныхъ въ предыдущемъ вопросѣ, при цѣнѣ окраски 2 коп. за 1 кв. дюймъ.

5. Если у васъ есть кубическій ящикъ, внутренніе размѣры котораго 10 д., сколько цилиндровъ вы можете уложить въ него, если каждый цилиндръ имѣетъ въ діаметрѣ 2 дюйма и въ высоту 4 дюйма?

Сколько нужно вамъ опилокъ, чтобы заполнить пустое мѣсто въ ящикѣ?

6. Компанія мальчиковъ взяла метровую линейку и англійскую рулетку, чтобы измѣрить ими поверхность и объемъ гимнастической „кобылы", которая имѣла форму цилиндра съ полушаровыми концами. Они нашли, что длина, за исключеніемъ концовъ, равняется 5 дециметрамъ, а окружность 33 дюймамъ.

a) Какая полная поверхность въ кв. см.?
в) „ „ „ „ „ футахъ?
c) Какой объемъ въ куб. см.?
д) „ „ „ „ футахъ?

5. **Объемъ пирамиды**. Просмотрите опытъ съ объемомъ пирамиды, стр. 64—65.

Описанная тамъ пирамида имѣетъ квадратное основаніе, равное основанію куба, съ которымъ пирамида сравнивается, и высота равна высотѣ куба. Объемъ пирамиды, найденный опытомъ, равнялся одной трети объема куба.

Опредѣлимъ теперь объемъ пирамиды другимъ способомъ. Предположимъ, что какая-то пирамида лежитъ внутри куба и основаніе пирамиды есть въ то же время грань куба, а вершина V находится въ центрѣ куба; слѣдовательно, высота пирамиды равна половинѣ высоты куба. Теперь, если вы вообразите, что каждая грань куба стала основаніемъ пирамиды, имѣющей вершину въ V, то вы увидите, что шесть одинаковыхъ пирамидъ какъ разъ наполняютъ кубъ. Объемъ каждой пирамиды есть одна шестая часть объема куба или одна шестая площади основанія, умноженной на высоту куба, или одна треть площади его основанія, умноженной на ея собственную высоту.

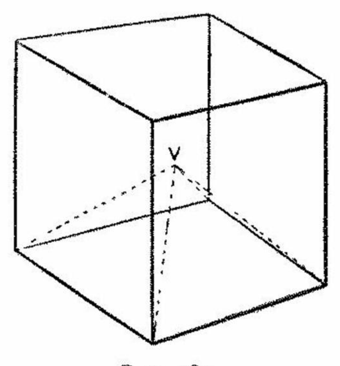


Рис. 284.

Объемы всѣхъ пирамидъ находятся по этому же правилу: умножая площадь основанія на высоту и дѣля произведеніе на 3.

Площадь основанія можетъ быть найдена однимъ изъ способовъ, которые мы употребляли для нахожденія площадей многоугольниковъ. Высота можетъ быть смѣрена прикладываніемъ горизонтальной линейки къ вершинѣ пирамиды

и къ какому-нибудь предмету, имѣющему вертикальную поверхность, и вымѣриваніемъ затѣмъ высоты по этой вертикальной поверхности.

Если основаніе пирамиды есть правильный многоугольникъ и вершина лежитъ прямо надъ центромъ основанія, то тѣло называется *правильной* пирамидой. Въ этомъ случаѣ боковая поверхность ея состоитъ изъ равныхъ треугольниковъ, имѣющихъ основаніемъ стороны многоугольника, а высотами боковую высоту пирамиды.

1. Какой объемъ пирамиды, площадь основанія которой 24 кв. см., а высота 7 см.?

2. У пирамиды, описанной на стр. 65—66, ребра имѣютъ каждое по 5 см. длины, высота граней около 4,3 см.; высота пирамиды около 4,1 см.

Какой объемъ этой пирамиды?

Какая площадь всей поверхности?

3. Какая высота одной изъ шести равныхъ пирамидъ, которыя какъ разъ наполняютъ кубическій ящикъ, внутреннія измѣренія котораго по 14 д.?

4. Какой объемъ наименьшаго кубическаго ящика, внутри котораго вы могли бы помѣстить пирамиду, поверхность которой представлена діаграммой на стр. 61.

5. Какой объемъ пирамиды, которая могла бы быть заключена въ треугольную призму, поверхность которой представлена на стр. 41, если основаніе пирамиды покроетъ основаніе призмы, а вершина пирамиды какъ разъ касается верхней плоскости призмы?

6. Если прямоугольный параллелепипедъ, описанный на стр. 28—29, размѣры котораго 4 д. $\times$ 3 д. $\times$ 2 д., будетъ раздѣленъ на шесть пирамидъ трехъ различныхъ величинъ, и каждая пирамида имѣла бы одну изъ граней параллелепипеда своимъ основаніемъ, то въ какой бы общей точкѣ помѣщались вершины этихъ пирамидъ?

7. Наибольшая пирамида въ Египтѣ имѣетъ основаніемъ квадратъ со стороною въ 693 фута, а высота ея 500 футовъ.

Какой ея объемъ?

6. **Объемъ конуса.** Просмотрите опытъ съ объемомъ конуса на стр. 97—98.

Описанный тамъ конусъ имѣетъ основаніе и высоту, равныя основанію и высотѣ цилиндра, съ которымъ онъ сравнивается. Было найдено, что объемъ конуса равняется одной трети объема цилиндра.

Объемъ всякаго конуса можетъ быть найденъ умноже-

ніемъ площади его основанія на его высоту и дѣленіемъ произведенія на 3.

Если линія, соединяющая вершину конуса съ центромъ основанія, перпендикулярна къ основанію, то тѣло называется *прямымъ конусомъ*. Боковая (или кривая) поверхность конуса равняется въ такомъ случаѣ половинѣ боковой высоты, умноженной на окружность основанія.

Если вы строите конусъ по діаграммѣ его поверхности, то уголъ сектора дается самой діаграммой; но вы можете опредѣлить этотъ уголъ и прямо по изготовленной модели. Вы можете замѣтить, что дуга сектора имѣетъ ту же самую длину, какъ и полная окружность основанія, которая съ нимъ соединяется. Но если дуга одного круга имѣетъ ту же самую длину, какъ цѣлая окружность другого круга, то ихъ радіусы должны быть различны; дуга будетъ та же самая часть своей собственной окружности, какую часть короткій радіусъ представляетъ отъ длиннаго радіуса; и число градусовъ въ дугѣ то же самое, что и въ углу сектора. Такимъ образомъ на діаграммѣ стр. 94, если радіусъ дуги есть $2^1/_4$ д., а радіусъ основанія 1 д., то $1 \div 2\frac{1}{4} = \frac{4}{9}$; а $\frac{4}{9}$ отъ 360^0 есть 160^0, которые и составляютъ уголъ сектора.

Если вы построите ту же самую діаграмму по даннымъ тамъ метрическимъ измѣреніямъ, то вы найдете, что уголъ сектора окажется въ 161^0 вмѣсто 160^0; это происходитъ отъ того, что радіусъ сектора, при точномъ вычисленіи, есть $5{,}6^1/_4$ см., вмѣсто 5,6 см.

1. Какой объемъ конуса, котораго высота 10 см., а діаметръ его основанія 7 см.?

2. Какой объемъ наибольшаго конуса, который можно выточить изъ кубическаго куска дерева, ребро котораго 10 см.?

3. Радіусъ основанія конуса 3 д., высота его 4 д., а боковая высота 5 д.

Найти: a) Площадь основанія.
в) „ боковой поверхности.
c) „ всей поверхности.
д) Объемъ.
e) Уголъ сектора, который образуетъ боковую поверхность.

4. Сколько конусовъ можно отлить изъ мѣднаго цилиндра 20 д. длиною и 4 д. въ діаметрѣ; конусы должны быть 5 д. высотою и 2 д. въ діаметрѣ?

5. Высота конуса 12 см., косая высота 13 см. и радіусъ основанія 5 см.

Найти: a) Площадь основанія.
в) „ боковой поверхности.

c) Площадь полной поверхности.

д) Объемъ.

e) Уголъ сектора, образующаго боковую поверхность.

6. Предположите, что прямоугольный треугольникъ, у котораго стороны 6, 8 и 10 д., вращается, какъ на оси, сначала на короткомъ катетѣ, а потомъ на длинномъ. Найти и сравнить объемы и полныя поверхности двухъ образованныхъ такимъ образомъ конусовъ.

7. **Объемъ шара**. Объемъ шара почти равенъ половинѣ объема куба, ребро котораго есть діаметръ шара (см. стр. 103). Болѣе точная цифра можетъ быть найдена умноженіемъ объема куба $^{11}/_{21}$.

1. Какой объемъ шара, радіусъ котораго 7 см.?

2. Какой объемъ шара, радіусъ котораго 5 см.?

3. Сколько кубическихъ миль содержится въ земномъ шарѣ, діаметръ котораго 7912 миль?

4. Если кубическій дюймъ желѣза вѣситъ 7 унц., то сколько вѣситъ желѣзный шаръ, діаметръ котораго 4 дюйма?

5. Восемь стеклянныхъ шаровъ, каждый съ діаметромъ въ 6 см., уложены въ кубическій ящикъ, ребро котораго 12 см. Сколько нужно опилокъ, чтобы дополнить пустое пространство?

6. Діаметръ шара на соборѣ св. Павла 6 фут. Сколько онъ можетъ вмѣстить въ себя кубическихъ футовъ?

7. Сколько свинцовыхъ шариковъ, 1 см. въ діаметрѣ, можно вылить изъ свинцоваго цилиндра, длина котораго 14 см., а діаметръ 35 мм.?

8. Если шарообразный кусокъ глины, діаметръ котораго 8 см., передѣлать на конусъ съ тѣмъ же самымъ діаметромъ, то какая будетъ высота конуса?

9. Какой будетъ діаметръ шара, если объемъ его въ кубическихъ дюймахъ тотъ же самый, какъ и площадь его поверхности въ квадратныхъ дюймахъ?

10. Если у цилиндрическаго ящика діаметръ равенъ глубинѣ его, то какую часть пространства заполнитъ наибольшій шаръ, который можно положить въ этотъ ящикъ?

8. **Объемъ неправильныхъ тѣлъ.** Объемъ неправильныхъ тѣлъ можетъ быть найденъ опытнымъ путемъ. Напримѣръ, возьмите кружку, объемъ которой можетъ быть вымѣренъ, и наполните ее отчасти водою, замѣтивши уровень, на которомъ она будетъ стоять. Затѣмъ, если вы погрузите тѣло неправильной формы въ воду и замѣтите тотъ новый уровень, до котораго она подымется, то вы такимъ

образомъ можете косвенно вычислить объемъ тѣла: кажущееся приращеніе объема воды будетъ объемомъ тѣла.

1. Въ цилиндрическомъ колодцѣ, съ діаметромъ въ 4 фута, вода стоитъ на 12 футовъ ниже краевъ; но когда въ колодецъ была брошена куча камней, то уровень воды поднялся до 8 фут. ниже краевъ колодца. Опредѣлить объемъ камней.

2. Статуэтка была уложена въ опилки въ кубическій ящикъ, внутренніе размѣры котораго 3 дцм., и ящикъ былъ совершенно полонъ; но когда статуэтка была вынута, то уровень опилокъ опустился на 12 см. ниже верха ящика. Найти объемъ статуэтки.

ГЛАВА XXVIII.

Отношеніе и пропорція.

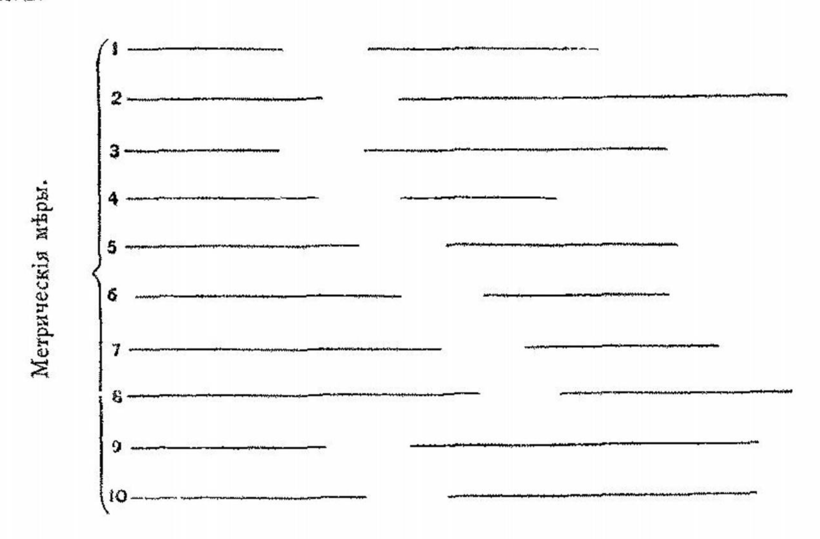
1. Отношеніе показываетъ, во сколько одна величина больше другой однородной съ ней величины.

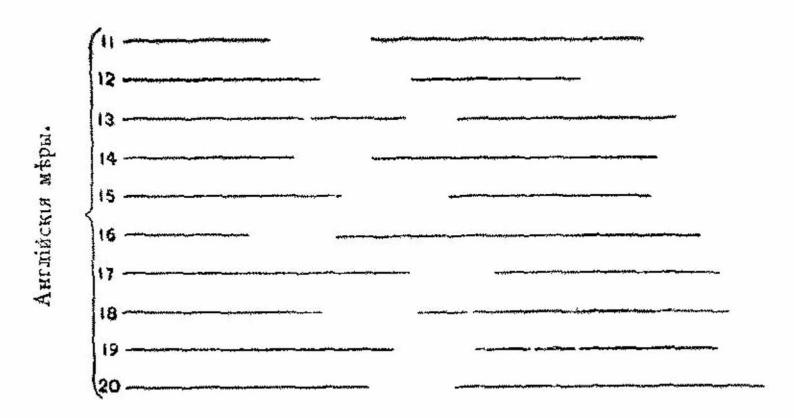
Напримѣръ, если линія AB имѣетъ 3 см. въ длину, а CD 4 см., то отношеніемъ AB къ CD будетъ $^3/_4$.

Смѣряйте слѣдующія линіи и найдите отношеніе первыхъ ко вторымъ въ каждомъ случаѣ.

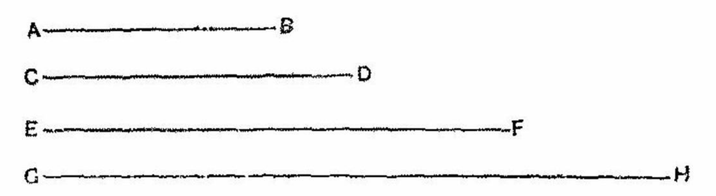
A ———————— B

C ————————— D





2. Если два отношенія равны другъ другу, то они составляютъ пропорцію.



Напримѣръ, если четыре линіи AB, CD, EF, GH имѣютъ 3, 4, 6 и 8 см., такъ что отношеніе AB къ CD равно $^3/_4$, а отношеніе EF къ GH равно $^6/_8$, т.-е. тоже $^3/_4$, то, слѣдовательно, *отношеніе первыхъ двухъ* линій равно отношенію двухъ послѣднихъ, и длины четырехъ линій составляютъ пропорцію.

Пропорція пишется такимъ образомъ:

$$AB : CD = EF : GH,$$

т.-е. что AB имѣетъ точно такое же отношеніе къ CD, какъ EF имѣетъ къ GH, или, какъ обыкновенно говорится, *AB относится къ CD, какъ EF къ GH.*

Затѣмъ предположите, что два квадрата имѣютъ стороны въ 2 и 3 см., такъ что периметры ихъ будутъ 8 и 12 см., и мы можемъ сказать, что периметры пропорціональны сторонамъ, $8 : 12 = 2 : 3$.

Напишите въ числахъ пропорціи, которыя существуютъ между периметрами и двумя сторонами слѣдующихъ многоугольниковъ:

1. Два квадрата, стороны которыхъ 1 и 3 см.
2. Два квадрата, стороны которыхъ 3 и 5 см.
3. Два квадрата, периметры которыхъ 8 см. и 12 см.

4. Два равностороннихъ треугольника, стороны которыхъ 5 см. и 2 см.

5. Два ромба, стороны которыхъ 1 см. и 4 см.

6. Два квадрата, периметры которыхъ 16 см. и 12 см.

7. Два равностороннихъ треугольника, периметры которыхъ 3 см. и 12 см.

8. Два равностороннихъ пятиугольника, стороны которыхъ 2 см. и 3 см.

9. Два равностороннихъ шестиугольника, периметры которыхъ 6 см. и 20 см.

10. Два правильныхъ десятиугольника, периметры которыхъ 15 см. и 20 см.

11. Два квадрата, стороны которыхъ 3 д. и 4 д.

12. Два квадрата, стороны которыхъ 1 д. и 3 д.

13. Два квадрата, периметры которыхъ 8 д. и 12 д.

14. Два равностороннихъ треугольника, стороны которыхъ 4 д. и 5 д.

15. Два ромба, периметры которыхъ 12 д. и 16 д.

16. Два равностороннихъ пятиугольника, стороны которыхъ 1 д. и 2 д.

17. Два равностороннихъ шестиугольника, периметры которыхъ 12 д. и 18 д.

18. Два равностороннихъ треугольника, периметры которыхъ 12 д. и 18 д.

19. Два ромба, стороны которыхъ 2 д. и 3 д.

20. Два квадрата, стороны которыхъ 2 д. и 3 д.

Начертите четыре линіи, длины которыхъ составляли бы слѣдующія пропорціи:

21 . 2 : 5 = 6 : 15   23 . 3 : 2 = 6 : 4   25 . 6 : 2 = 3 : 1.
22 . 1 : 2 = 3 : 6   24 . 2 : 3 = 4 : 6.

Замѣтьте, что въ этихъ пропорціяхъ произведеніе двухъ наружныхъ чиселъ, называемыхъ *крайними* членами, равно произведенію двухъ внутреннихъ чиселъ, называемыхъ *средними* членами пропорціи; такъ $2 \times 15 = 5 \times 6$; $1 \times 6 = 2 \times 3$ и т. д.

Это обыкновенно выражается такъ: „во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ“. Посредствомъ этого правила, если какія-нибудь три изъ образующихъ пропорцію числа даны, то четвертое можетъ быть найдено.

Предположите, что вы имѣете пропорцію:

$$3 : 9 = 2 : X,$$

гдѣ четвертаго числа не достаетъ и оно обозначено лишь буквою X. Тогда по правилу $3 \times X = 9 \times 2$, или $3 \times X = 18$, или $X = 6$; и пропорція можетъ быть восполнена, если вмѣсто X поставить 6; такимъ образомъ:

$$3 : 9 = 2 : 6.$$

Дополните недостающее число въ слѣдующихъ пропорціяхъ:

26. $5 : 3 = 10 : X$
27. $6 : 2 = X : 3$
28. $X : 8 = 3 : 4$
29. $5 : X = 3 : 6.$
30. $3 : 7 = 5 : X$

3. Если три линіи даны, четвертая можетъ быть найдена, для пополненія пропорціи, слѣдующимъ способомъ.

Предположите, что есть три линіи a, $в$ и c; буквой x обозначьте четвертую линію, которая дополнитъ пропорцію $a : в = c : x$.

Отъ какой-нибудь точки P проведите двѣ линіи PL и PM подъ какимъ-нибудь угломъ одна къ другой.

Начиная отъ P, отложите на одной линіи разстояніе PY, равное a, и PZ, равное $в$. На другой линіи отмѣтьте разстояніе PW, равное c.

Проведите линію YW и проведите ZV параллельно YW.

Тогда разстояніе PV будетъ равно искомой линіи x.

Т.-е. PY : PZ = PW : PV.
или $a : в = c : x$.

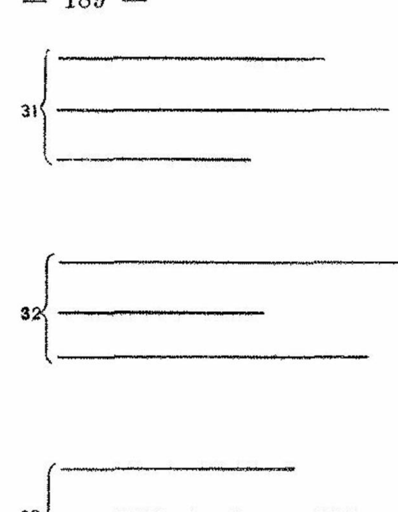
Рис. 285.

Также, смѣривши длину линій YW и ZV, вы найдете, что обѣ онѣ въ пропорціи съ PY и PZ, и съ PW и PV,

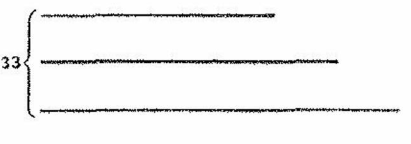
т.-е. YW : ZV = PY : PZ
и YW : ZV = PW : PV.

Замѣтьте также, что углы PYW и PZV равны; также равны и углы PWY и PVZ.

Этотъ вопросъ о пропорціи можетъ показаться вамъ труднымъ, но вы должны преодолѣть его, такъ какъ онъ въ скоромъ времени будетъ вамъ необходимъ въ задачахъ по землемѣрію.

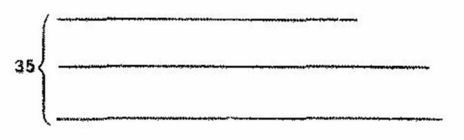


Землемѣры примѣняютъ этотъ принципъ постоянно; они находятъ длину трехъ линій пропорціи и затѣмъ вычисляютъ, безъ дѣйствительнаго вымѣриванія, длину четвертой линіи, которая дѣлаетъ пропорцію полной.



Найдите этимъ способомъ четвертыя линіи, которыя дополнятъ слѣдующія пропорціи:





36. Отмѣтьте двѣ трети линіи AB.

Намекъ: на какой-нибудь линіи, какъ AL, отъ A отложите разстояніе AX, равное 2 единицамъ длины (сантиметры, дюймы и т. д.) и AY, равное 3 тѣмъ же самымъ единицамъ.

37. Раздѣлите линію CD на двѣ части, одна изъ которыхъ составляла бы двѣ пятыхъ всей линіи.

C ——————————— D

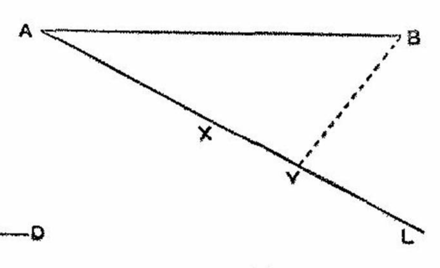


Рис. 286.

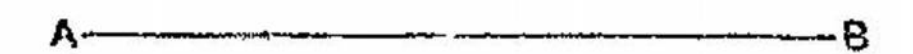
38. Раздѣлите линію EF на двѣ части, одна изъ которыхъ составляла бы пять восьмыхъ всей линіи.

39. Начертите линію въ 7 см. длиною и раздѣлите ее на двѣ части, одна изъ которыхъ составляла бы три пятыхъ всей линіи.

40. Начертите линію въ 8 см. длиною и раздѣлите ее на двѣ части, одна изъ которыхъ составляла бы одну треть всей линіи.

4. Раздѣлить прямую линію на какое-нибудь данное число равныхъ частей.

a) При помощи линейки съ дѣленіями.



Пусть AB данная линія и ее нужно раздѣлить на 5 равныхъ частей.

Способъ дѣленія сходенъ съ тѣмъ, который показанъ на стр. 35.

b) При помощи циркуля и простой линейки.

Пусть AB прямая линія, которую надо раздѣлить на 5 равныхъ частей.

Отъ A проведите какую-нибудь подходящую прямую линію AX, идущую подъ какимъ-нибудь угломъ къ AB.

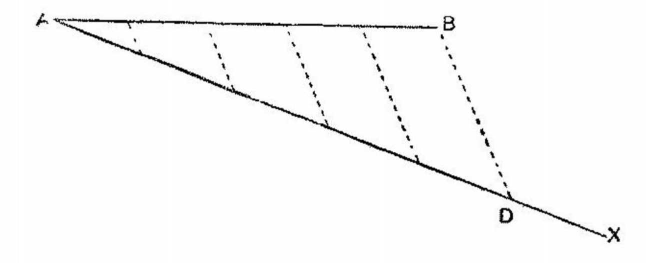


Рис. 287.

Начиная отъ A, отложите по AX пять равныхъ разстояній какой-нибудь подходящей длины; пусть D будетъ послѣдней точкой дѣленія.

Проведите прямую линію отъ D къ B и черезъ другія точки дѣленій на AD проведите при помощи циркуля линіи параллельныя DB.

Эти линіи раздѣлятъ AB на пять равныхъ частей.

c) При помощи наугольника или параллельной линейки.

Начните, какъ въ (b), но проводите параллельныя линіи при помощи треугольника или параллельной линейки.

Начертите прямыя линіи, равныя слѣдующимъ даннымъ, и раздѣлите ихъ на указанное число равныхъ частей.

41	На	три	равныя	части
42	„	четыре	„	„
43	„	пять	„	„
44	„	три	„	„
45	„	шесть	„	„
46	„	три	„	„
47	„	семь	„	„
48	„	двѣ	„	„
49	„	пять	„	„
50	„	восемь	„	„

ГЛАВА XXIX.

Подобіе фигуръ и тѣлъ.

1. **Подобные многоугольники** имѣютъ одинаковую форму, т.-е. одинъ есть точно воспроизведенная копія другого. Каждый уголъ и каждая сторона одного многоугольника

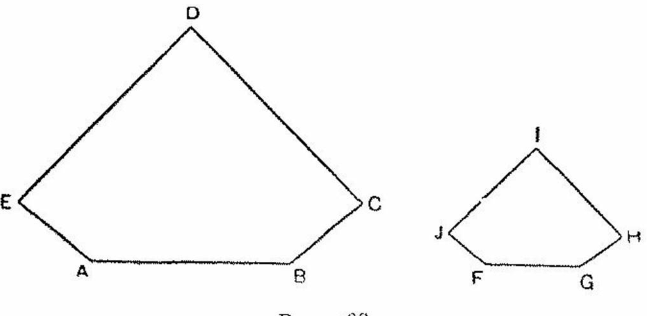


Рис. 288.

соотвѣтствуетъ углу и сторонѣ другого. Два соотвѣтствующихъ угла равны между собою въ каждомъ случаѣ; такъ

уголъ A = углу F, уголъ B = углу G, уголъ C = углу H и т. д. Равные углы расположены въ одинаковомъ порядкѣ въ обоихъ многоугольникахъ; такъ, если вы начнете отъ A и будете обходить многоугольникъ по направленію вправо, то углы его будутъ соотвѣтственно равны угламъ другого многоугольника, если начать отъ F и также итти вокругъ въ правую сторону.

У подобныхъ многоугольниковъ соотвѣтствующія стороны *не* равны, но длины какой-нибудь пары сторонъ находятся какъ разъ въ томъ же самомъ отношеніи, какъ и длины какой-нибудь другой пары; такимъ образомъ, если AB въ три раза длиннѣе, чѣмъ FG, то и BC въ три раза длиннѣе, чѣмъ GH, и CD въ три раза длиннѣе, чѣмъ HI и т. д.

Всякія двѣ пары соотвѣтствующихъ сторонъ подобныхъ многоугольниковъ образуютъ пропорцію:

$$AB : FG = BC : GH$$
$$CD : HI = DE : IJ.$$

Соотвѣтствующія стороны имѣютъ то же самое положеніе въ двухъ многоугольникахъ по отношенію къ равнымъ угламъ, такъ что если вы начнете отъ A и будете обходить вправо, то стороны будутъ соотвѣтствовать сторонамъ другого многоугольника, начиная отъ F и тоже обходя вправо.

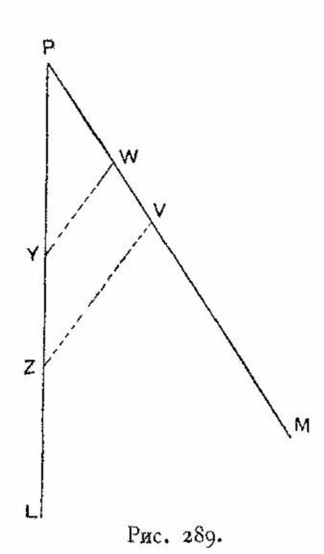


Рис. 289.

Два многоугольника не будутъ подобны, если только равны ихъ соотвѣтствующіе углы; напримѣръ, квадратъ не подобенъ прямоугольнику. Также многоугольники не будутъ подобны, если только ихъ стороны пропорціональны: квадратъ не подобенъ ромбу. И углы и стороны должны быть изслѣдованы, раньше чѣмъ вы можете заключить, что данные многоугольники подобны.

Треугольники, однако, представля-

ютъ исключеніе. У двухъ треугольниковъ, имѣющихъ равные соотвѣтствующіе углы, стороны *должны* быть пропорціональны; и, наоборотъ, если вы найдете, что стороны двухъ треугольниковъ пропорціональны, вы можете заключить, что ихъ углы соотвѣтственно равны. Вы могли уже убѣдиться въ этомъ, чертя пропорціональныя линіи (см. стр. 190). На повторяемомъ здѣсь чертежѣ 289 треугольники PYW и PZV подобны. Углы P, Y и W соотвѣтствуютъ угламъ P, Z и V; P = P, Y = Z, W = V. Стороны PY, PW и YW соотвѣтствуютъ PZ, PV и ZV; и

$$PY : PZ = PW : PV = YW : ZV.$$

2. Начертить многоугольникъ, который былъ бы подобенъ данному многоугольнику.

Разбейте данный многоугольникъ на треугольники и затѣмъ начертите рядъ треугольниковъ, которые были бы подобны полученнымъ вами раньше треугольникамъ.

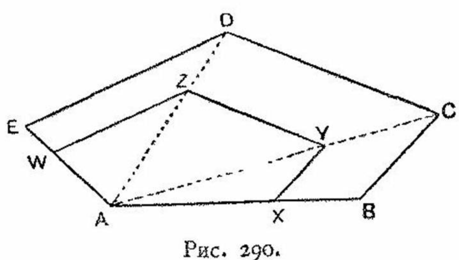


Рис. 290.

Предположите, например, что вы желаете начертить многоугольникъ, который былъ бы подобенъ данному ABCDE, но имѣлъ бы стороны, составляющія только двѣ трети сторонъ даннаго. Отъ одной изъ вершины A проведите діагонали къ другимъ вершинамъ и отложите на AB разстояніе AX, равное двумъ третямъ AB. Проведите XY параллельно BC; YZ параллельно CD и ZW параллельно DE. Тогда многоугольникъ AXYZW будетъ искомымъ многоугольникомъ, потому что его углы соотвѣтственно равны угламъ многоугольника ABCDE и стороны его каждая составляетъ двѣ трети соотвѣтствующихъ сторонъ многоугольника ABCDE.

1. Назовите пары равныхъ угловъ въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ; также пары соотвѣтствующихъ сторонъ.

2. Какъ относятся между собою по длинѣ цѣлые периметры двухъ подобныхъ многоугольниковъ?

3. Начертите квадратъ со стороною въ 5 см. и внутри его другой квадратъ, котораго стороны составляли бы три пятыхъ перваго.

4. Начертите два прямоугольника—одинъ со сторонами 7 см. и 3 см., а другой подобный первому, но со сторонами, равными пяти седьмымъ перваго.

5. Начертите два ромба: одинъ со сторонами въ 4 см. и углами 45⁰ и 135⁰, а другой подобный первому, но со сторонами въ три четверти перваго.

6. Начертите два параллелограмма: одинъ со сторонами въ 6 см. и 4 см. и углами 60⁰ и 120⁰, а другой подобный первому, но со сторонами въ двѣ трети перваго.

7. Начертите два треугольника, один съ углами 30⁰, 60⁰ и 90⁰ и самой короткой стороной 3 см., а другой подобный первому, но со сторонами вдвое короче.

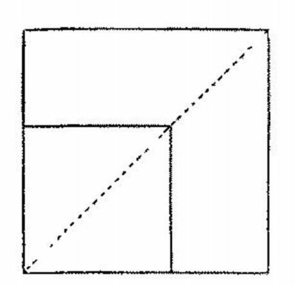


Рис. 291.

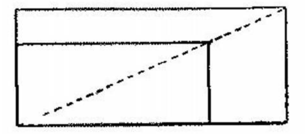


Рис. 292.

8. Начертите два треугольника: одинъ съ основанiемъ 8 см. и углами при концахъ основанiя въ 40⁰ и 70⁰, а другой подобный первому, но съ основанiемъ, составляющимъ три четверти перваго.

9. Начертите три параллелограмма, одинъ внутри другого, всѣ подобные, съ углами въ 45⁰ и 135⁰, но чтобы стороны каждаго составляли двѣ трети сторонъ ближайшаго большого, а стороны наибольшаго должны быть 9 см. 45 мм.

10. Начертите два подобныхъ пятиугольника; каждый уголъ перваго долженъ быть по 108⁰, а каждая сторона по 3 см.; сторона второго должна быть вдвое больше стороны перваго.

3. Площади подобныхъ многоугольниковъ. Если сторону квадрата AB удвоить и построить на AC другой квадратъ, то новый квадратъ будетъ содержать четыре квадрата, каждый равный первому. Если сторону AB утроить и построить на AD квадратъ, то онъ будетъ содержать девять квадратовъ, равныхъ первоначальному.

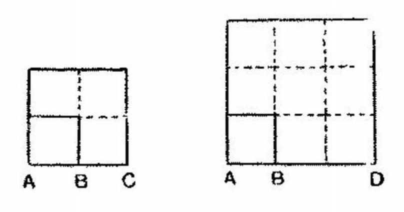


Рис. 293.

Подобнымъ же образомъ, если стороны треугольника T удвоить и построить новый треугольникъ, подобный T, то онъ будетъ содержать четыре

треугольника, равныхъ T; а утроенная сторона треугольника T даетъ треугольникъ, площадь котораго въ девять разъ больше площади T.

Точно такъ же и со всякими многоугольниками, подобными другъ другу, какъ P и L; увеличивая стороны вдвое, по-

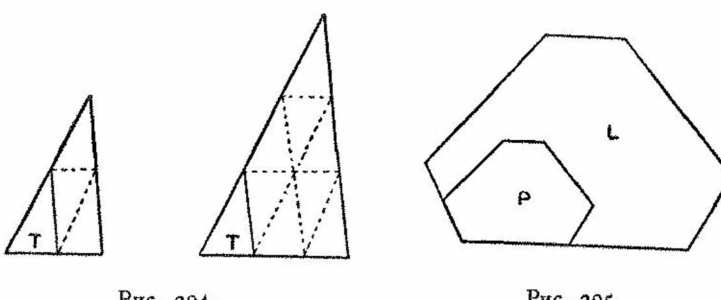


Рис. 294. Рис. 295.

лучаемъ площадь многоугольника вдвое большую противъ прежней, и такъ далѣе.

Этотъ законъ выражаютъ кратко такъ: „Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ".

Квадратъ числа есть то же число, умноженное само на себя; такимъ образомъ квадратъ 5 есть 25; квадратъ 7 есть 49; квадратъ 8 есть 64; квадратъ $^2/_3$ есть $^4/_9$; квадратъ $^5/_7$ есть $^{25}/_{49}$.

11. Если вы къ сторонѣ квадрата въ 2 см. прибавите еще 3 см., то сколько вы этимъ прибавите къ его площади?

12. Сторона нѣкотораго многоугольника равняется 3 см., а площадь 80 кв. см. Какой величины будетъ площадь подобнаго ему многоугольника, соотвѣтствующая сторона котораго есть 12 см.?

13. Двѣ соотвѣтствующія стороны двухъ подобныхъ многоугольниковъ равны 5 см. и 7 см. Въ какомъ отношеніи ихъ площади?

14. Площади двухъ подобныхъ многоугольниковъ 50 кв. см. и 200 кв. см. Одна изъ сторонъ большого многоугольника равняется шести дюймамъ. Какой длины соотвѣтствующая сторона другого многоугольника?

15. Во сколько разъ площадь діаграммы призмы на стр. 39—40 меньше площади діаграммы, которую нужно было построить?

16. Если вы удвоите длину какой-нибудь линіи діаграммы параллелепипеда на стр. 28, во сколько разъ вы увеличите ея площадь?

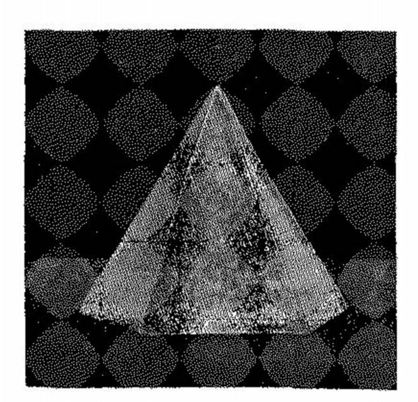
17. Если вамъ нужна была бумага 14 см. $\times$ 12 см., чтобы сдѣлать діаграмму на стр. 79, какъ тамъ было указано, то какихъ размѣровъ

вамъ нужно бы было бумагу, если бы поверхность пирамиды составляла одну четверть теперешней площади?

18. Если правильный двѣнадцатигранникъ на стр. 108 имѣетъ сторону въ 1 см. длиною, то площадь его поверхности составляетъ около 20,65 кв. см. Какая была бы площадь, если бы ребро имѣло 3 см. въ длину?

19. Площадь штата Кентуки имѣетъ около 40,000 кв. миль. Какая будетъ площадь карты Кентуки, если она начерчена по масштабу 1 : 200,000?

4. **Подобные многогранники.** Два многогранника подобны, если одинъ есть точно воспроизведенная копія другого. У такихъ тѣлъ соотвѣтственныя ребра пропорціональны, соотвѣтствующія грани подобны и соотвѣтствующіе двугранные углы равны.



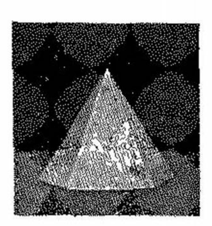


Рис. 296. Подобные многоугольники.

Полныя поверхности ихъ пропорціональны квадратамъ какихъ-нибудь двухъ соотвѣтствующихъ реберъ.

Посмотримъ теперь, какъ относятся ихъ объемы. Если ребро куба увеличить вдвое и построить на немъ другой кубъ, то онъ будетъ содержать 8 кубовъ, равныхъ первому. Если ребро перваго куба утроить, то новый кубъ будетъ содержать 27 кубовъ точно такой же величины, какъ и первый. Такимъ образомъ при увеличиваніи ребра вдвое, объемъ увеличивается въ 8 разъ

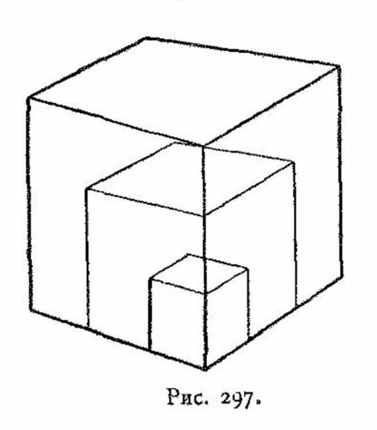


Рис. 297.

и при увеличенiи ребра втрое, объемъ увеличивается въ 27 разъ. То же самое будетъ справедливо относительно всякаго многогранника, какой бы то ни было формы.

Этотъ законъ выражаютъ кратко такъ: „объемы подобныхъ многогранниковъ относятся другъ къ другу, какъ кубы соотвѣтствующихъ реберъ“.

Кубомъ числа называется то же число, умноженное само на себя дважды; такимъ образомъ кубъ 2 есть $2 \times 2 \times 2$ или 8; кубъ 7 есть $7 \times 7 \times 7$ или 343; кубъ $^4/_5$ есть $^4/_5 \times {^4/_5} \times {^4/_5}$ или $^{64}/_{125}$ и т. д.

1. Что сдѣлается съ объемомъ куба, если его ребро удлиннить такъ, чтобы оно стало въ 5 разъ длиннѣе, чѣмъ прежде?

2. Два соотвѣтствующихъ ребра двухъ подобныхъ пирамидъ есть 3 см. и 4 см. Какъ относятся ихъ объемы?

3. Если правильный восьмигранникъ, показанный на стр. 107, имѣетъ ребро въ 1 см., то его объемъ равенъ приблизительно 471 куб. мм. Какой будетъ объемъ правильнаго восьмигранника, если сдѣлать его ребро въ 5 см., какъ это сказано въ наставленiи?

4. Если правильный двадцатигранникъ на стр. 107 имѣетъ ребро въ 1 см. длиною, то его объемъ равенъ приблизительно 2,18 куб. децим. Какой будетъ объемъ подобнаго двадцатигранника, если ребро его сдѣлать, какъ указано, въ 2 см. 5 мм.?

5. Если правильный двѣнадцатигранникъ на стр. 108 имѣетъ ребро въ 1 см., то объемъ его равенъ приблизительно 7,66 куб. см. Какой будетъ объемъ двѣнадцатигранника, сдѣланнаго согласно указанiямъ, по которымъ ребро его должно имѣть въ длину 1,9 см.?

6. Усѣченная пирамида, описанная на стр. 79, есть нижняя часть отъ полной пирамиды, черезъ которую прошла плоскость параллельно основанiю и раздѣлила боковыя ребра каждое на двѣ равныя части. Какая часть первоначальной пирамиды отдѣлена этой плоскостью?

7. Если дiаграмма, изображенная на стр. 109, будетъ сложена такъ, чтобы образовать призму, какой будетъ ея объемъ сравнительно съ объемомъ призмы, которая описана сопутствующими указанiями?

8. Если Гулливеръ имѣлъ въ высоту 6 фут. и его носъ имѣлъ въ длину $2^1/_4$ дюйма, а лилипуты были ростомъ только 6 дюймовъ, но имѣли форму совершенно сходную съ нимъ, то какой длины былъ у лилипутовъ носъ?

9. Если на пару перчатокъ Гуливеру нужно 128 кв. дюйм. матерiалу, то сколько бы нужно было матерiалу на пару перчатокъ для лилипута?

10. Если Гуливеръ вѣсилъ 180 фунтовъ, то сколько вѣсилъ лилипутъ?

ГЛАВА XXX.

Съемка плановъ.

1. Землемѣріе. Предположите, что вы, начиная отъ одного угла вашего двора, промѣряли длину каждой его стороны при помощи метра, а величину каждаго угла при помощи транспортира. Затѣмъ предположите, что посредствомъ протянутой изъ угла въ уголъ веревки вы раздѣлили дворъ на треугольники, площадь которыхъ вы бы измѣрили.

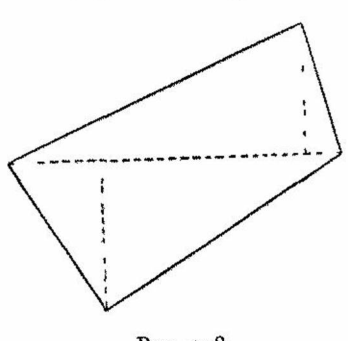


Рис 298.

Наконецъ предположите, что вы начертили на бумагѣ планъ двора, согласно съ вашими измѣреніями и вычисленіями. Если бы вы сдѣлали все это, вы бы сдѣлали то, что называется съемкой плана.

Снять на планъ участокъ земли значитъ смѣрять его границы и углы и опредѣлить его форму, его площадь и его положеніе по отношенію къ сосѣдней землѣ. Площадь находится вычисленіемъ, послѣ того какъ сдѣланы другія измѣренія; вамъ уже были показаны различные методы, употребляемые для этого.

Хотя каждая сторона и каждый уголъ можетъ быть измѣренъ, какъ мы мѣрили школьный дворъ, но такое измѣреніе было бы мѣшкотно, если бы участокъ земли былъ великъ и, можетъ-быть, было бы невозможно, если бы промѣривать пришлось черезъ деревья, дома, воду и т. п. Поэтому искусство землемѣрія состоитъ въ томъ, чтобы производить возможно меньше дѣйствительныхъ измѣреній, а остальное опредѣлить вычисленіями. Землемѣры вычисляютъ отчасти съ помощью геометріи, отчасти примѣняя особые инструменты.

Геометрія помогаетъ землемѣрамъ тѣмъ, что научаетъ ихъ чертить подобные многоугольники и съ ихъ помощью вычислять настоящую величину измѣряемой площади. Геометрія учитъ, что:

I. У подобныхъ многоугольниковъ соотвѣтствующіе углы равны и соотвѣтствующія стороны пропорціональны.

II. Треугольники подобны во всѣхъ отношеніяхъ,

a) Если ихъ соотвѣтствующіе углы равны; или

b) Если ихъ соотвѣтствующія стороны пропорціональны; или

c) Если двѣ соотвѣтствующія стороны пропорціональны и углы, образуемые этими сторонами, равны.

Землемѣрные инструменты это только болѣе удобные и болѣе точные замѣстители метровой линейки и транспортира.

Для измѣренія линій существуетъ цѣпь и стальная лента длиною отъ 100 до 250 футовъ.

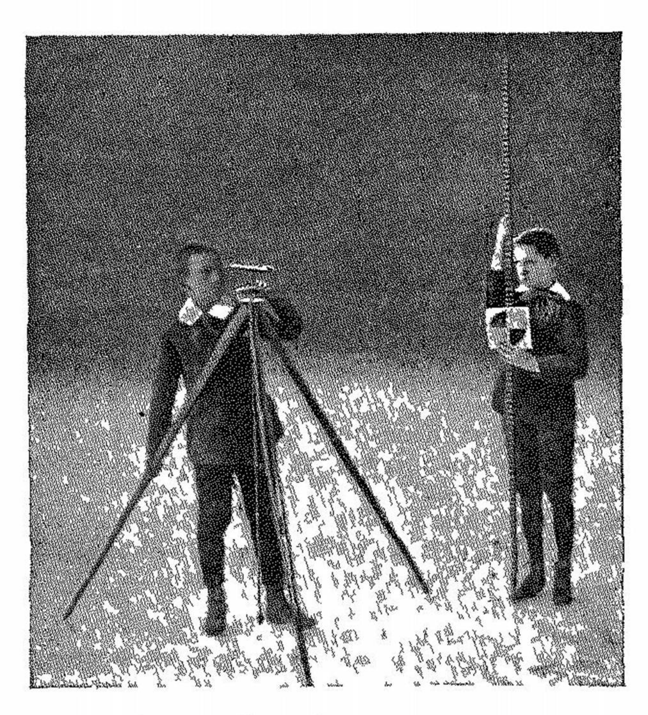


Рис 299. Землемѣрные инструменты.

Для измѣренія угловъ употребляется нѣсколько инструментовъ; *транзитъ*, *астролябія* и другія.

Транзитъ состоитъ изъ транспортира, называемаго въ этомъ случаѣ лимбомъ. Лимбъ укрѣпленъ на треножникѣ. Тутъ же прикрѣплена небольшая подзорная трубка для разглядыванія отдаленныхъ предметовъ. Верхняя доска треножника можетъ быть установлена совершенно горизонтально, и два маленькихъ спиртовыхъ уровня, укрѣпленные на этой доскѣ, указываютъ, находится ли она въ горизонтальномъ положеніи. Подзорная трубка укрѣплена на оси въ центрѣ лимба и можетъ вращаться на ней и имѣетъ указатель для опредѣленія наблюдаемаго угла.

Снизу, въ центрѣ лимба, прикрѣпляется отвѣсъ, который показываетъ точку на землѣ, соотвѣтствующую вершинѣ наблюдаемаго угла.

Для измѣренія высотъ транзитъ имѣетъ другой транспортиръ, который остается вертикальнымъ, т.-е. перпендикулярнымъ къ первому: подзорная трубка вращается и около этого второго лимба и имѣетъ другой вертикальный указатель.

Наконецъ, землемѣръ имѣетъ еще *нивеллирную рейку* для указанія на отдаленномъ предметѣ точки, которая находится на одной горизонтальной линіи съ лимбомъ. Нивеллирная рейка—это деревянный брусокъ въ 6 фут. длиною со скользящимъ по нему кругомъ, который можетъ быть укрѣпленъ такъ, что его центръ будетъ на линіи зрѣнія подзорной трубки.

Если вамъ нѣтъ возможности поработать этими инструментами, то ихъ можно замѣнить другими, которые такъ же хорошо будутъ служить нашимъ цѣлямъ.

Для измѣренія длины вы можете употреблять 50-футовую ленту; или вы можете взять брусокъ въ 3 метра (или 10 фут.) длиною, раздѣленный на мелкія части. Этотъ брусокъ можетъ также служить и нивеллирной рейкой.

Землемѣрный транзитъ—дорогой инструментъ; но всякій доста точно смышленый и ловкій мальчикъ, который имѣетъ понятіе о томъ, для какого употребленія предназначается транзитъ, можетъ сдѣлать совершенно пригодное для той же цѣли пособіе изъ матеріаловъ, которые онъ легко найдетъ подъ руками. Здѣсь данъ рисунокъ такого инструмента.

Транспортиръ (лимбъ) въ 360°, начерченный на бумагѣ, наклеенъ на квадратную доску; указатель—маленькая дощечка—вращается на

винтикѣ, укрѣпленномъ въ центрѣ Для наведенія служатъ двѣ иглы и двѣ цинковыя пластинки съ узкими щелями; неподвижная иголка втыкается въ доску на 0⁰. Отвѣсъ и треножникъ могутъ быть сдѣланы безъ особыхъ затрудненій, и затѣмъ инструментъ можно употреблять или съ доской, укрѣпленной вертикально (на ребро) для измѣренія высотъ или установленной горизонтально для измѣренія угловъ на плоскости.

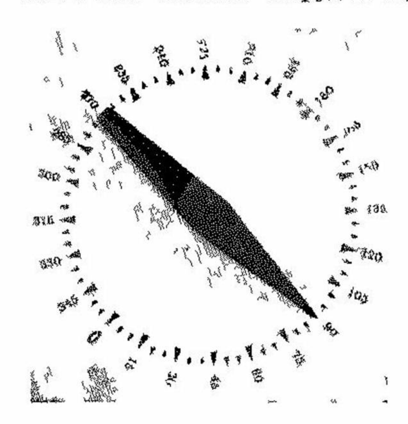


Рис. 300.

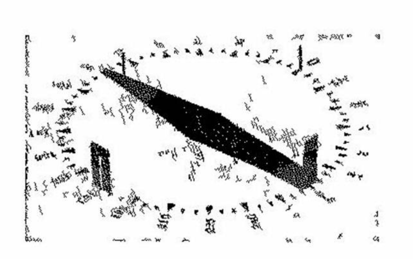


Рис. 301.

Лимбъ транзита (въ двухъ видахъ)

2. Землемѣрныя задачи. Предположимъ теперь, что у насъ есть землемѣрные инструменты—транзитъ, лента или линейка, нивеллирная рейка и тетрадь бумаги,—и мы можемъ приступить къ практическимъ работамъ.

Удобнѣе всего будетъ вамъ работать съ четырьмя товарищами—одинъ будетъ держать нивеллирную рейку, въ то время какъ вы будете работать транзитомъ, двое будутъ измѣрять основную линію (базу) и одинъ будетъ записывать наблюденіе въ тетрадь. Было бы хорошо немедленно повторять каждое измѣреніе каждымъ членомъ партіи; и пусть всѣ вмѣстѣ работаютъ надъ задачами, которыя будутъ сейчасъ предложены. Дѣлайте чертежи и вычисленія самымъ тщательнымъ образомъ.

Мы разсмотримъ пять задачъ:

1. Какъ опредѣлить высоту предмета, который стоитъ на горизонтальной плоскости.

2. Какъ опредѣлить высоту предмета, къ которому нельзя подойти достаточно близко.

3. Какъ опредѣлить разстояніе до предмета, къ которому нельзя подойти.

4. Какъ опредѣлить разстояніе между двумя предметами, не подходя къ нимъ.

5. Какъ сдѣлать планъ какого-нибудь участка земли.

Всякая землемѣрная работа начинается съ *основной линіи* или *базы*, т.-е. разстояніе по землѣ отъ точки подъ отвѣсомъ транзита до какой-нибудь точки, гдѣ поставлена нивеллирная рейка.

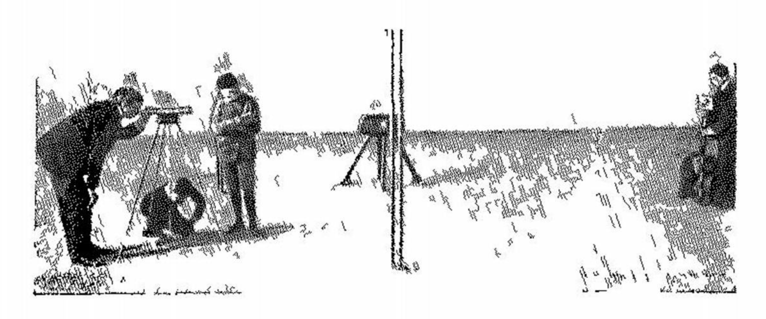


Рис. 302. Измѣреніе базы.

Землемѣръ старается опредѣлить длину всѣхъ остальныхъ линій только путемъ вычисленій; поэтому вымѣриваніе базы должно быть сдѣлано очень тщательно, такъ какъ ошибка въ этомъ вымѣриваніи повторится нѣсколько разъ и вѣроятно возрастетъ.

Горизонтальный уголъ между двумя предметами образуется двумя воображаемыми линіями, протянутыми отъ этихъ предметовъ къ центру лимба транзита.

Для измѣренія такого угла землемѣръ, убѣдившись, что его транзитъ горизонталенъ, наводитъ его на предметы, отмѣчая каждый разъ число градусовъ, показываемыхъ на лимбѣ указателемъ. Нивеллирную рейку полезно приставлять къ каждому предмету и кружокъ на ней подымать и опускать до тѣхъ поръ, пока центръ диска не станетъ въ уровень съ транзитомъ.

Высотный уголъ образуется двумя воображаемыми линіями отъ вершины и отъ основанія предмета къ центру вертикальнаго лимба транзита. Для измѣренія его транзитъ наводятъ на вершину и на основаніе предмета и замѣчаютъ

число градусовъ, показываемыхъ на вертикальномъ лимбѣ указателемъ.

Въ слѣдующихъ задачахъ изъ двухъ точекъ, на которыя наводится транзитъ, болѣе низкая находится на одномъ горизонтальномъ уровнѣ съ транзитомъ. Поэтому высота транзита должна быть въ концѣ концовъ прибавлена къ высотѣ той части предмета, которая получена вычисленіемъ.

1. Какъ опредѣлить высоту предмета, стоящаго на горизонтальной плоскости?

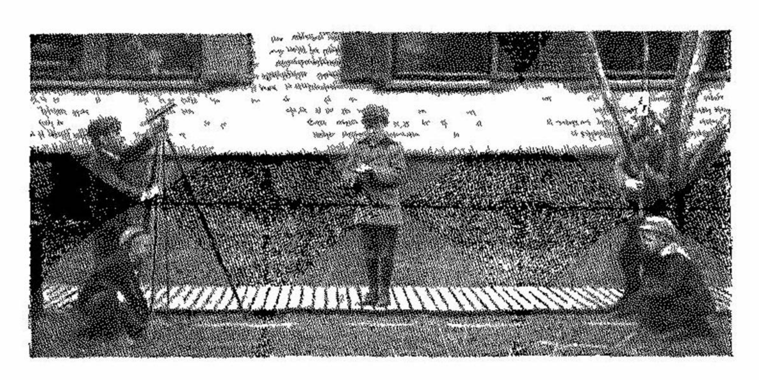
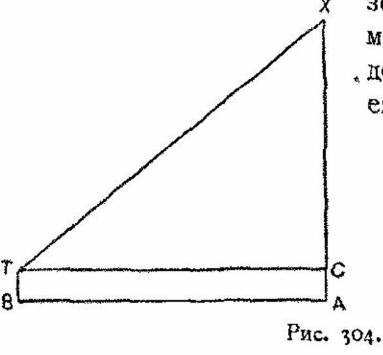


Рис. 303 Измѣренiе высоты дерева.

На рисункѣ 303 изображена группа мальчиковъ, дѣлающихъ измѣренія, по которымъ опредѣляется высота дерева, представляемая на чертежѣ (рис. 304) линiею AX.

Транзитъ (T на чертежѣ) устанавливается въ надлежащее *положенiе, при чемъ отвѣсъ виситъ* надъ точкою B на землѣ. Рейка ставится прямо подъ высшей точкой дерева, и дискъ (кружокъ) ея подымается или опускает-



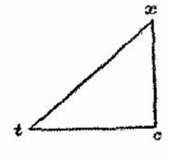


Рис. 304.

ся до тѣхъ поръ, пока его центръ не будетъ на одной горизонтальной линіи съ транзитомъ. Высота CA записывается. Затѣмъ наводятъ инструментъ на вершину дерева X и отмѣчаютъ уголъ CTX. Разстояніе AB измѣряется по землѣ.

Этихъ измѣреній достаточно для опредѣленія искомой высоты AX; они вносятся въ тетрадь мальчикомъ, который ведетъ запись и который обязанъ также сдѣлать чертежъ, подобный ACXTB, нужный для будущаго употребленія.

Вычисленія дѣлаются послѣ, каждымъ мальчикомъ отдѣльно, слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что измѣренія были такія:

CA (= TB) = 4 фута
AB (= CT) = 25 фут.
уголъ CTX = 39^0.

Начертите на бумагѣ линію *ct*, представляющую CT въ какомъ-нибудь масштабѣ, пусть $^1/_{100}$; затѣмъ, такъ какъ CT равняется 25 фут, то *ct* будетъ равняться $^1/_{100}$ отъ 25 фут., или 3 дюймамъ.

При помощи транспортира постройте уголъ около *t*, равный CTX, т.-е. 39^0, и около *c* уголъ, равный CTX, т.-е 90^0, и продолжите линіи до ихъ встрѣчи въ *x*.

Такимъ образомъ вы построили треугольникъ *ctx*, подобный треугольнику CTX, и ихъ соотвѣтствующія стороны будутъ пропорціональны. Смѣряйте длину *cx* и сравните ее съ длиною *ct*. Предположите, что *cx* есть $^4/_5$ длины *ct*; тогда CT будетъ $^4/_5$ длины CT; или, такъ какъ CT равняется 25 футамъ, то CX равняется 20 футамъ Къ этому надо еще прибавить длину CA (= 4 фута), и тогда мы получимъ, что длина AX равняется 24 футамъ, и это есть высота дерева.

Живя въ деревнѣ или городѣ, вы, можетъ-быть, когда-нибудь захотите измѣрить высоту какого-нибудь предмета— дерева, колокольни, башни или какого-нибудь другого строенія, а у васъ не будетъ подъ руками никакого инструмента. Зная все то, что вы уже знаете относительно подобныхъ многоугольниковъ, вы можете сдѣлать это съ нѣкоторой точностью, если только предметъ, который вы хотите измѣ-

рить, бросаетъ тѣнь отъ солнца Около этого предмета будетъ, вѣроятно, находиться какой-нибудь невысокій предметъ—напримѣръ, столбъ,—тоже бросающій тѣнь. Вы опредѣлите на глазъ высоту столба и длину его тѣни; затѣмъ, такъ какъ отношеніе болѣе высокаго предмета къ своей



Рис 305 Измѣреніе тѣни.

тѣни то же самое, то все, что вамъ останется сдѣлать, это смѣрить шагами его тѣнь.

Предположите, напримѣръ, что AB представляетъ башню, и AS есть ея тѣнь; предположите также, что DE представляетъ мальчика, стоящаго около башни, и DF есть его тѣнь. Треугольники ABS и DEF подобны; поэтому, если мальчикъ 5 фут. ростомъ, а его тѣнь 4 фут. длины, то высота башни будетъ пять четвертей длины ея тѣни. Слѣдовательно, если мальчикъ знаетъ, что длина его шага 21 дюймъ и что онъ сдѣлалъ по тѣни башни 32 шага, то онъ найдетъ, что длина тѣни 56 футовъ; а пять четвертей отъ 56 футовъ будетъ 70 фут., и это будетъ высота башни.

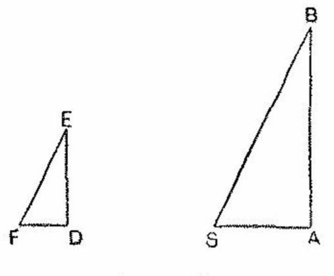


Рис. 306

2. Теперь, какъ опредѣлить высоту предмета, къ которому нельзя подойти достаточно близко?

Предположимъ, что AB есть предметъ, къ которому нельзя подойти ближе, чѣмъ C.

Промѣрьте подходящее разстояніе CD на одной горизонтальной линіи съ A. Поставьте транзитъ въ T, чтобы от-

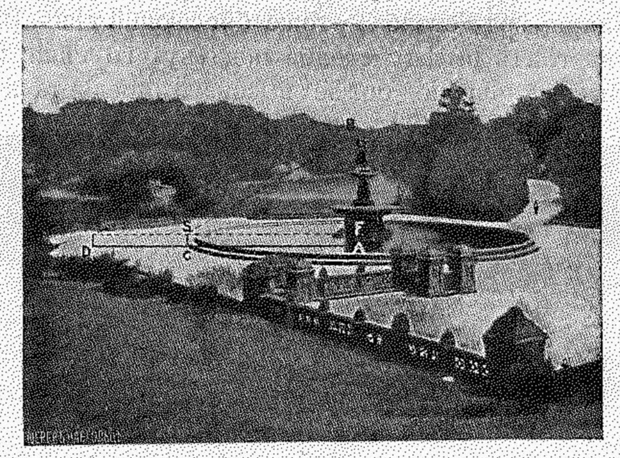
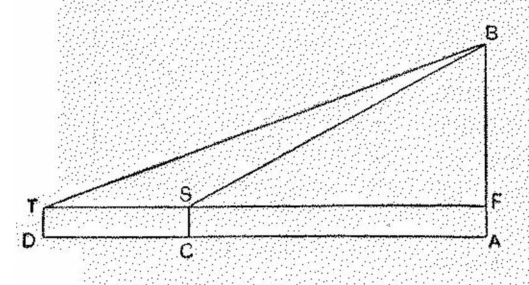


Рис. 307. Фонтанъ въ Центральномъ паркѣ, въ Нью-Йоркѣ.

вѣсъ висѣлъ надъ D. Наводите сначала на точку F (на линіи AB) на одной горизонтали съ T, и смѣряйте транзитомъ уголъ FTB. Затѣмъ переставьте транзитъ въ S, чтобы отвѣсъ висѣлъ надъ C, и смѣряйте уголъ FSB.

По этимъ измѣреніямъ вы можете опредѣлить высоту AB.

Начертите на бумагѣ линію *st*, представляющую базу ST (= CD) въ какомъ-нибудь подходящемъ масштабѣ и продолжите линію по направленію къ x. При помощи транспортира постройте уголъ *ftb*, равный углу FTB, и уголъ *fsb*, равный углу FSB. Отъ *b* проведете *bf*, перпендикулярно къ *tx*.



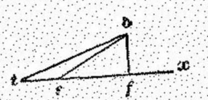


Рис. 308.

Треугольники STB и *stb* подобны и даютъ пропорцію:

$$ST : SB = st : sb,$$

изъ которой ST и *st* уже

извѣстны, а sb можетъ быть вымѣрена по чертежу; такъ что SB можно вычислить. Именно,

$$SB = \frac{sb \times ST}{st}$$

Треугольники FSB и fsb подобны и даютъ пропорцію:

$$SB : FB = sb : fb,$$

въ которой SB и sb уже извѣстны, а fb можетъ быть вымѣрена по чертежу; такъ что FB можно вычислить. Именно,

$$FB = \frac{SB \times fb}{sb}$$

Къ найденной такимъ образомъ высотѣ FB вы должны еще прибавить DT (= AF)—высоту транзита, и тогда получится полная высота AB.

3. Какъ опредѣлить ваше разстояніе до предмета, не подходя къ нему?

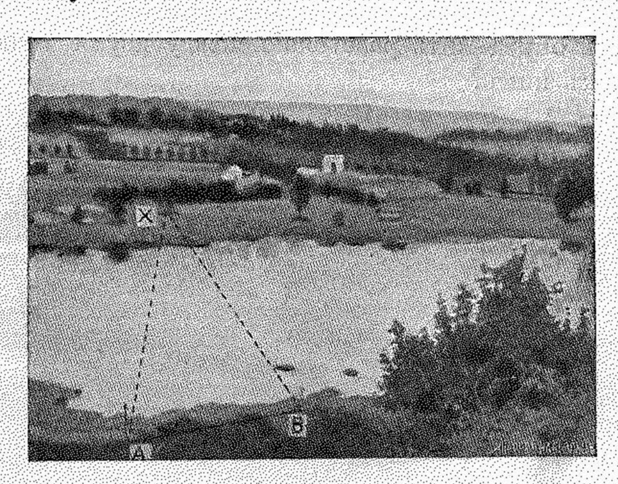


Рис. 309.

Предположите, что вы стоите въ точкѣ A, и желаете знать ваше разстояніе до предмета X, который на другомъ берегу рѣки.

Начиная отъ A, промѣряйте линію AB въ какомъ-нибудь удобномъ направленіи и подходящей длины. Ставя транзитъ

въ A, а потомъ въ B, смѣряйте углы A и B Этихъ измѣреній достаточно для опредѣленія разстоянія AX.

Начертите на бумагѣ линію *ab*, представляющую базу AB въ какомъ-нибудь подходящемъ масштабѣ. Съ помощью транспортира постройте уголъ *a*, равный A, и уголъ *b*, равный B, и вы получите треугольникъ *abx* Треугольники *abx* и ABX подобны и даютъ пропорцію:

$$ab\,.\,AB = ax : AX,$$

въ которой *ab* и AB уже извѣстны, а *ax* можетъ быть вымѣрена по чертежу; такъ что AX можетъ быть опредѣлена.

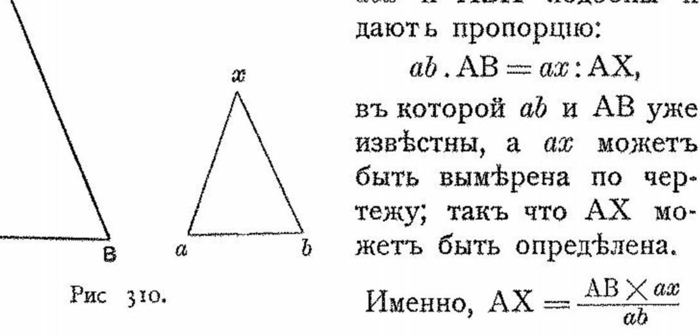


Рис 310.

Именно, $AX = \frac{AB \times ax}{ab}$

4. Какъ опредѣлить разстояніе между двумя точками, не подходя къ нимъ?

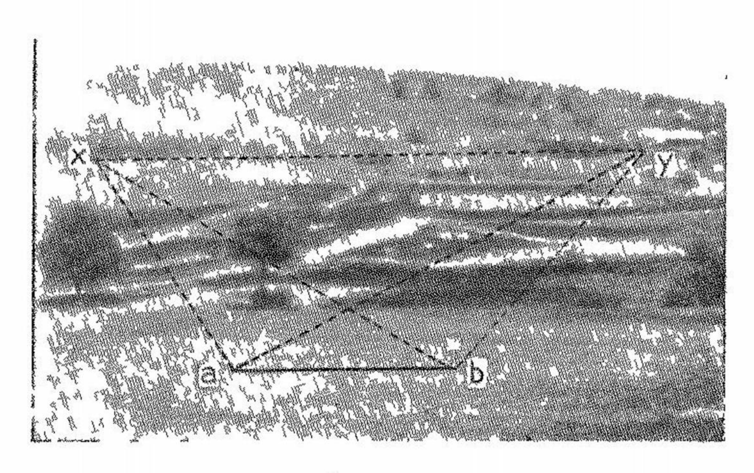


Рис 311

Предположите, что X и Y двѣ точки, разстояніе между которыми вы хотите узнать.

Промѣряйте линію AB въ удобномъ направленіи и подходящей длины

Поставьте транзитъ въ A, смѣряйте углы BAX, YAX и BAY. Затѣмъ, поставивши транзитъ въ B, смѣряйте углы ABX и ABY. Этихъ измѣреній достаточно, чтобы опредѣлить разстояніе XY.

Начертите на бумагѣ треугольникъ *abx*, подобный треугольнику ABX, и пусть *ab* представляетъ базу AB въ умень-

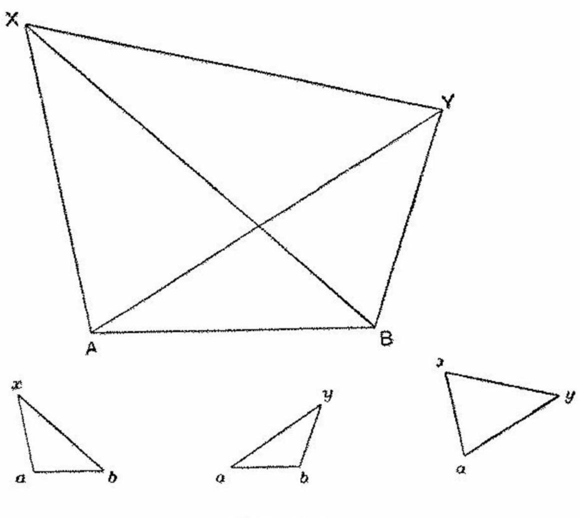


Рис. 312.

шенномъ масштабѣ; уголъ *bax*=углу BAX. Затѣмъ, измѣривши *ax* и примѣняя правило пропорціи, вы можете вычислить длину AX.

Затѣмъ начертите треугольникъ *aby*, подобный треугольнику ABY, и пусть *ab* представляетъ AB по тому же самому масштабу, какъ и раньше; уголъ *bay* = углу BAY, и уголъ *aby* = углу ABY. Послѣ этого, вымѣривши *ay* и прикладывая правило пропорціи, вы можете вычислить длину AY.

Наконецъ начертите треугольникъ *yax*, подобный треугольнику YAX, и пусть уголъ *yax* равенъ углу YAX, и пусть *ax* и *ay* имѣютъ ранѣе вычисленную величину За-

тѣмъ, измѣривши длину *xy* и прикладывая правило пропорціи, вы можете вычислить длину XY.

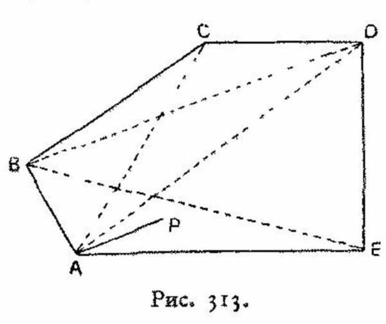


Рис. 313.

5. Какъ снять на планъ участокъ земли?

Предположите, что ABCDE есть участокъ, планъ котораго намъ нужно сдѣлать.

Это *значитъ, вы должны* найти:

1) Длину границъ.

2) Направленіе относительно странъ свѣта, въ которомъ лежитъ по крайней мѣрѣ одна изъ границъ.

3) Величину угловъ.

4) Величину площади.

Наконецъ вы начертите планъ мѣстности и на одномъ углу бумаги покажете масштабъ, въ которомъ сдѣланъ планъ.

Начните съ выбора положенія для вашей базы. Это должно быть сдѣлано тщательно, такъ какъ одна база можетъ служить для всей съемки. Пусть вы выбрали одну изъ границъ участка (напримѣръ, AB); но если границы очень длинны или еще почему-нибудь неудобны для измѣренія, то вы можете провести линію для базы въ какомъ-нибудь другомъ направленіи, напримѣръ, какъ AP.

Предположимъ, что AB есть база и что она тщательно вымѣрена. Тогда, взявши транзитъ и принявши концы базы за вершины, измѣряйте углы BAC, CAD и DAE, и ABE, EBD и BDC.

Опредѣлите направленіе базы AB при помощи компаса.

Этихъ измѣреній достаточно, чтобы закончить съемку вычисленіями.

Во-первыхъ, при помощи задачи, которая говоритъ, какъ найти разстояніе до предмета, не подходя къ нему, опредѣлите разстояніе точки A отъ другихъ угловъ участка.

Затѣмъ сдѣлайте на бумагѣ чертежъ въ подходящемъ масштабѣ, показывая углы BAC, CAD и DAE и разстоянія AB, AC, AD и AE.

Соедините концы этихъ линій, и вы получите многоугольникъ *abcde*, подобный многоугольнику ABCDE.

Измѣряйте стороны многоугольника *abcde* и при помощи правила пропорціи (стр. 118) вычислите длину границъ участка.

Смѣряйте углы *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: это будутъ также и углы участка.

Рис. 314.

Найдите площадь многоугольника *abcde* однимъ изъ способовъ, указанныхъ на стр. 172—175, и при помощи правила пропорціи вычислите площадь участка.